Representación Categórica de los Espacios de Banach

Sergio Chaves

Noviembre de 2010

Resumen

La teoría de Categorías es una rama de las matemáticas que ha tenido gran desarrollo desde mediados del siglo pasado, donde la generalización de lo "universal" ha sido el principal motivo de estudio en las categorías. Tal generalización permite realizar una dialéctica entre las estructuras de la matemática, ya sean éstas algebraicas, lógicas, conjuntistas o analistas; a través de definiciones universales que capturan dichas propiedades estructurales. De esta manera, a continuación se realiza un breve estudio de los espacios de Banach como estructuras categóricas y la representación que a éstos espacios puede darse de la manera más universal posible.

1. Teoría de Categorías

Definición.
Una categoría $\mathbb{C}$ es una estructura constituida por

(1) Una colección de objetos denotada por $Ob(\mathbb{C})$.

(2) Para cada par de objetos $X, Y \in Ob(\mathbb{C})$, un conjunto de morfismos denotado $H(X,Y)$ o $\mathbb{C}(X,Y)$; y cada elemento $f \in H(X,Y)$ se representa de la forma $X \xrightarrow{f} Y$.

(3) Una operación de composición asociativa $\circ$ tal que para todo $f \in H(X,Y)$ y $g \in H(Y,Z)$ $g \circ f \in H(X,Z)$.

(4) Para cada conjunto $H(X,X)$ existe $id_X \in H(X,X)$ tal que $f \circ id_X = f$ y $id_X \circ g = g$.

La teoría de Categorías, generaliza la noción del mundo conjuntista en el cual se centra la mayoría de las matemáticas; por esta razón; la categoría de conjuntos <u>Set</u> ha sido de mucho estudio y fuerte relación con las demás categorías. Así pues, en la categoría <u>Set</u> los objetos son conjuntos; para cada par de conjuntos A, B; $H(A,B)$ es simplemente las funciones entre A y B; y la ley de composición es naturalmente la composición usual entre funciones.

Otros ejemplos de categorías son la categoría <u>Top</u> de espacios topológicos y cuyos morfismos son las funciones continuas entre espacios topológicos; o la categoría <u>Grp</u> de grupos y los morfismos los homomorfismos entre grupos.

Así existen cientos de categorías, unas con estructura algebraica (Grp, GrpAb, Mod, etc), o topológica (Top, Haus, Stone); o simples categorías constituidas por un par de objetos y unos cuantos morfismos entre estos.

Una categoría se dice pequeña si su colección de objetos es un conjunto y no una clase propia, como es el caso de las categorías mencionadas hasta el momento.

1.1. Morfismos distinguidos

En las categorías existen cierto tipo de morfismos que son de mayor interés, ya que cumplen cierta propiedad que generaliza las propiedades de las funciones usuales entre conjuntos, es decir, inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. De ahora en adelante se supondrá que se esta trabajando en una categoría arbitraria $\mathbb{C}$

Definición.
Sea $X \xrightarrow{f} Y$ *morfismo en* $\mathbb{C}$.

(1) *Se dice que* f *es* **monomorfismo** *si siempre que dadas* $Z \xrightarrow{g} X$, $Z \xrightarrow{h} X$ *tales que* $f \circ g = f \circ h$ *esto implica que* $g = h$.

(2) *Se dice que* f *es* **epimorfismo** *si dados* $Y \xrightarrow{g} Z$, $Y \xrightarrow{h} Z$ *tales que* $g \circ f = h \circ f$ *entonces* $g = h$.

(3) *Se dice que* f *es* **isomorfismo** *si existe* $Y \xrightarrow{g} X$ *tal que* $f \circ g = id_Y$ *y* $g \circ f = id_X$

Si un morfismo es a la vez monomorfismo y epimorfismo entonces se dice que es bimorfismo. No existe dificultad alguna en verificar que todo isomorfismo es bimorfismo. Dos objetos son isomorfos si existe un isomorfismo entre ellos.

1.2. Productos y Coproductos

Los productos y coproductos en categorías generalizan la noción usual de producto cartesiano y unión disyunta en sentido conjuntista.

Definición.
Sea $(X_i)_{i\in I}$ *una familia de objetos de una categoría* $\mathbb{C}$. *El producto de esta familia (si existe); notado* $\prod_{i\in I} X_i$ *es un objeto de la categoría junto una colección de morfismos* $(\pi_i)_{i\in I}$, $\prod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\pi_i} X_i$ *llamados proyecciones tal que cumple la siguiente propiedad universal:*

Si existe Z *objeto y* $(f_i)_{i\in I}$, $Z \xrightarrow{f_i} X_i$ *una colección de morfismos, entonces existe un único morfismo* $Z \xrightarrow{\Phi} \prod_{i\in I} X_i$ *tal que* $\pi_i \circ \Phi = f_i$. *La representación de esta situación está dada de la siguiente manera:*

$$\begin{tikzcd}
 & & X_i \\
Z \arrow[rru, "f_i"] \arrow[r, dotted, "\exists!\Phi"] \arrow[rrd, "f_j"'] & \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[ru, "\pi_i"] \arrow[rd, "\pi_j"] & \\
 & & X_j
\end{tikzcd}$$

Definición.
Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathbb{C}$. El coproducto de esta familia (si existe); notado $\coprod_{i\in I} X_i$ es un objeto de la categoría junto una colección de morfismos $(ti_i)_{i\in I}$, $X_i \xrightarrow{t_i} \prod_{i\in I} X_i$ llamados inyecciones tal que cumple la siguiente propiedad universal:

Si existe Z objeto y $(f_i)_{i\in I}$, $X_i \xrightarrow{f_i} Z$ una colección de morfismos, entonces existe un único morfismo $\coprod_{i\in I} X_i \xrightarrow{\Phi} Z$ tal que $\Phi \circ t_i = f_i$. La representación de esta situación está dada de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rd, "t_i"'] \arrow[rrd, "f_i"] & & \\
 & \coprod\limits_{i\in I} X_i \arrow[r, dotted, "\exists!\Phi"] & Z \\
X_j \arrow[ru, "t_j"] \arrow[rru, "f_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

1.3. Límites y Colímites

Los límites y colímites generalizan la noción de productos y coproductos expuesta en la sección anterior; más aún, cada uno de éstos es un caso particular de límites y colímites respectivamente.

Definición.
Un funtor F, es una correspondencia $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$ entre dos categorías $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ tal que:

(1) F es una función entre los objetos de las categorías, es decir, para cada objeto $A \in Ob(\mathbb{C})$, $FA \in Ob(\mathbb{D})$.

(2) Para cada par de morfismos $f \in \mathbb{C}(A, B)$, $g \in \mathbb{C}(B, C)$ se tiene que $Ff \in \mathbb{D}(FA, FB)$, $Fg \in \mathbb{D}(FB, FC)$ y además $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$.

(3) Para cada objeto $A \in Ob(\mathbb{C})$, $Fid_A = id_{FA}$.

Sean $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{D}$, $\mathbb{D} \xrightarrow{G} \mathbb{C}$ funtores. Se dice que G es **adjunto izquierdo** de F, o que F tiene adjunto izquierdo G, si para cada par de objetos $C \in Ob(\mathbb{C})$ y $D \in Ob(\mathbb{D})$ si existe una correspondencia biyectiva entre los conjuntos $\mathbb{C}(GD, X)$ y $\mathbb{D}(D, FX)$.

Definición.
Sea $\mathbb{C}$ una categoría y D una categoría pequeña. Sea $D \xrightarrow{A} \mathbb{C}$ un funtor. Una **familia espectral** *es una colección $(A_d)_{d\in D}$ de objetos de $\mathbb{C}$ indexados por la categoría D, junto a una colección de morfismos $A_d \xrightarrow{f_\delta} A_{d'}$ para cada $d \xrightarrow{\delta} d'$ morfismo en D.*

Definición.
Sea $(A_d)_{d\in D}$ una familia espectral. Un objeto L junto con una colección de morfismos $(\varphi_d)_{d\in D}$ se dice el **límite** *de la familia espectral (si existe) si para cada $d, d' \in D$ y $d \xrightarrow{\delta} d'$ el diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} & A_d \arrow[dd, "f_\delta"] \\ L \arrow[ur, "\varphi_d"] \arrow[dr, "\varphi_{d'}"'] & \\ & A_{d'} \end{tikzcd}$$

Además, si dado un objeto B junto con una familia de morfismos $(\psi_d)_{d\in D}$ tales que el diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & A_d \arrow[dd, "f_\delta"] \\ B \arrow[ur, "\psi_d"] \arrow[dr, "\psi_{d'}"'] & \\ & A_{d'} \end{tikzcd}$$

existe un único morfismo $B \xrightarrow{\Phi} L$ tal que $\psi_d = \varphi_d \circ \Phi$ para todo $d \in D$; es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} & & A_i \arrow[dd, "f_\delta"] \\ B \arrow[urr, "f_i"] \arrow[r, dotted, "\Phi"] \arrow[drr, "f_j"'] & L \arrow[ur, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\varphi_j"'] & \\ & & A_j \end{tikzcd}$$

El objeto L es único (módulo isomorfismo) y es denotado por $L = \varprojlim A_d$

Sea D la categoría formada por $(\cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot)$. El límite P de esta familia espectral, llamado **pullback** está caracterizado por la siguiente propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[dr, dotted] & & \\
& P \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Dualmente se define la noción de colímite para una familia espectral.

Definición.
Sea $(A_d)_{d\in D}$ una familia espectral. Un objeto C junto con una colección de morfismos $(\varphi_d)_{d\in D}$ se dice el **colímite** *de la familia espectral (si existe) si para cada $d, d' \in D$ y $d \xrightarrow{\delta} d'$ diagrama conmuta y C satisface la propiedad universal*

$$\begin{tikzcd}
A_d \arrow[dr] \arrow[drr] \arrow[dd, "f_\delta"'] & & \\
& C \arrow[r, dotted] & Z \\
A_{d'} \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

En este caso, el colímite de una familia espectral es único (módulo isomorfismo) y se denota $\underset{\rightarrow}{\text{lím}}\, A_d$.

Sea D la categoría formada por $(\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot)$. El colímite R de esta familia espectral, llamado **pushout** está caracterizado por la siguiente propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
Y \arrow[r] \arrow[drr] & R \arrow[dr, dotted] & \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

2. Categoría Ban

Sea Ban la colección de todos los espacios de Banach sobre un cuerpo K (que puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Para evitar problemas teórico conjuntistas, supongamos que todos los espacios de Banach son "pequeños"; es decir, pertenecen a algún universo dado.

Existen dos importantes categorías relacionadas con Ban, dadas por las definiciones presentadas a continuación.

Definición.

(1) La categoría $\underline{\text{Ban}}_\infty$ donde los objetos de esta categoría son los espacios en Ban y cuyos morfismos son los operadores lineales acotados entre espacios de Banach. La ley de composición entre estos morfismos es naturalmente la composición usual entre funciones.

(2) La categoría $\underline{\text{Ban}}_1$, constituida por los mismos objetos que la categoría anterior, pero donde los morfismos entre espacios de Banach consisten únicamente de todas las contracciones lineales, es decir, los operadores lineales acotados f que satisfacen $||f|| \leq 1$.

Se usará la abreviación Ban para denotar la categoría $\underline{\text{Ban}}_\infty$ o $\underline{\text{Ban}}_1$ si alguna afirmación se tiene para ambas categorías. El conjunto de todos los morfismos $H(X,Y)$ en la categoría $\underline{\text{Ban}}_\infty$ coincide con el espacio de Banach $B(X,Y)$, mientras que el conjunto de los morfismos $H(X,Y)$ en la categoría $\underline{\text{Ban}}_1$ consiste de la bola unitaria cerrada en $B(X,Y)$.

Antes de comenzar con la tarea de traducir los conceptos del análisis funcional a el lenguaje de la teoría de Categorías, se probará el siguiente resultado sobre espacios de Banach, el cual será de utilidad para continuar con este mencionado proceso de traducción

Proposición 2.1.
Sea E un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de E. Entonces el conjunto E/M es un espacio de Banach con la siguiente norma inducida: para $\bar{x} \in E/M$,

$$||\bar{x}||_{E/M} = \inf\{||x-m|| : m \in M\}$$

Demostración. Para evitar problemas de notación, se omitirá el subíndice E/M en la norma cociente, y por contexto se entenderá qué norma se estará utilizando.

La norma esta bien definida, esto es, no depende del representante. En efecto, si $\bar{x} = \bar{y}$ entonces $x - y \in M$. Por tanto $x - y + m \in M$ para todo $m \in M$, de esta manera se tiene que

$$||\bar{x}|| = \inf\{||x-m|| : m \in M\} = \inf\{||x-(x-y+m)|| : m \in M\} = \inf\{||y-m|| : m \in M\} = ||\overline{y}||$$

Es evidente que $||\overline{x}|| \geq 0$; también $||\overline{x}|| = 0$ si y solo sí $x \in \overline{M} = M$ (M es cerrado). Para probar la desigualdad triangular, sean $x, y \in E$; para $\varepsilon > 0$ existen $a, b \in M$ tales que $||x-a|| \leq ||\overline{x}|| + \frac{\varepsilon}{2}$ y $||y-b|| \leq ||\overline{y}|| + \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto se tiene que $||\overline{x}+\overline{y}|| = ||\overline{x+y}|| \leq ||(x+y)-(a+b)||$ Puesto que $a+b \in M$.
Así se sigue que $||\overline{x}+\overline{y}|| \leq ||x-a|| + ||y-b|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}|| + \varepsilon$. Ya que esto se tiene para todo $\varepsilon > 0$ arbitrario; entonces se tiene inmediatamente la desigualdad triangular.

Para mostrar que para $\lambda \neq 0$, $||\overline{\lambda x}|| = |\lambda| ||\overline{x}||$ es suficiente notar que $\frac{m}{\lambda} \in M$ para todo $m \in M$.

Veamos ahora que E/M es completo. Note que $||\overline{x}|| = \text{ínf}\{||y|| : y \in \overline{x}\}$. Es suficiente mostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente. En efecto, sea $\sum_{n=1}^{\infty} ||\overline{x_n}||$, convergente. Dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \overline{x_n}$ tal que $||x_n|| \leq ||\overline{x_n}|| + \frac{1}{2^n}$. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||$ es convergente y ya que E es Banach entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente. Defina $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $y_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$. Ya que $\overline{y_k} = \sum_{n=1}^{k} \overline{x_n}$ y $||\overline{x} - \overline{y_k}|| \leq ||x - y_k||$; se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} = \overline{x}$. □

Corolario 2.2.
Sea E espacio de Banach y M subespacio cerrado de E. La proyección canónica $\pi : E \to E/M$ es un morfismo de $\underline{\text{Ban}}_1$ y $||\pi|| = 1$.

2.1. Caracterización de Morfismos en $\underline{\text{Ban}}$

Proposición 2.3.
Un morfismo $f : X \to Y$ en $\underline{\text{Ban}}$ es monomorfismo si y solamente sí f es inyectivo.

Demostración. f es monomorfismo si la igualdad $f \circ g = f \circ h$ para $g, h : Z \to X$ se satisface si y solo si $g = h$. Ya que $f \circ g = f \circ h$ es equivalente a $f \circ (\frac{g-h}{2}) = 0$. Por lo tanto f es monomorfismo si y solamente si $f \circ T = 0$ para $T : Z \to X$ implica $T = 0$.

Todo operador inyectivo f es monomorfismo, ya que $f \circ T = 0$ implica $f(T(z)) = 0$ para todo $z \in Z$, de donde se sigue inmediatamente de la inyectividad de f que $T(z) = 0$ para todo $z \in Z$.

Ahora sea f monomorfismo y considere $Z = ker(f)$, el cual es espacio de Banach pues $ker(f)$ es un subespacio cerrado de X; y $T : Z \to X$ la inclusión. Entonces $f \circ T = 0$ y por lo tanto $T = 0$, lo cual implica que $Z = ker(f) = \{0\}$, es decir, f es inyectivo. □

Proposición 2.4.
Un morfismo $f : X \to Y$ en $\underline{\text{Ban}}$ es epimorfismo si y solamente si $f(X)$ es denso en Y.

Demostración. De la misma manera que en la demostración anterior, se observa que f es epimorfismo si y solo sí para cualquier $g : Y \to Z$ tal que $g \circ f = 0$ implica que $g = 0$.

Si f tiene imagen densa en Y y $g \circ f = 0$, entonces para $y = f(x) \in f(X)$, se tiene que $g(y) = g(f(x)) = 0$. Por lo tanto g se anula en $f(X)$, ya que este es denso en Y por continuidad de g se sigue que $g(y) = 0$ para todo $y \in Y$.

Ahora sea $f : X \to Y$ epimorfismo, y considere $\overline{f(X)}$ la clausura de $f(X)$ en Y el cual es un subespacio cerrado de Y, y por tanto Banach.
Considere $g : Y \to Y/\overline{f(X)}$ la proyección canónica. Entonces $g \circ f = 0$ y por lo tanto $g = 0$, esto es, $\overline{f(X)} = Y$. □

Proposición 2.5.
Sea $f : X \to Y$ morfismo. f es isomorfismo en $\underline{\text{Ban}}_\infty$ si y solamente sí f es biyectivo. f es isomorfismo en $\underline{\text{Ban}}_1$ si y solamente sí f es una isometría inyectiva.

Demostración. Suponga que f es isomorfismo en $\underline{\text{Ban}}_\infty$, ya que f tiene inverso a izquierda y derecha entonces f es inyectivo y sobreyectivo respectivamente. Contrariamente, si f es biyectivo, el teorema de la aplicación abierta garantiza que f^{-1} es acotado.

Suponga que f es isomorfismo en $\underline{\text{Ban}}_1$, entonces f es inyectivo y sobreyectivo. Note que $1 = ||I|| = ||fg|| \leq ||f||||g|| \leq 1$ donde g es el inverso de f. Ya que $||f||, ||g|| \leq 1$ se sigue que $||f|| = ||g|| = 1$ y por lo tanto f es una isometría. Contrariamente, si f es isometría y sobreyectivo, por el teorema de la aplicación abierta f^{-1} es acotada. Veamos que $||f^{-1}|| = 1$; en efecto,

$$||f^{-1}(y)|| = ||f^{-1}(f(x))|| = ||x|| = ||f(x)|| = ||y||$$

□

Ejemplo:
Note que todo isomorfismo en $\underline{\text{Ban}}$ es bimorfismo; es decir, es monomorfismo y epimorfismo. No es cierto en general que todo bimorfismo sea isomorfismo; en efecto, considere $i : l^1 \to C_0$ la inclusión. No existe dificultad en mostrar que este operador esta bien definido, es inyectivo y tiene imagen densa (l^1 es denso en C_0).

Proposición 2.6.
Todo morfismo $f : X \to Y$ en $\underline{\text{Ban}}_1$ tiene la siguiente descomposición canónica.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/ker(f) \arrow[r, "\overline{f}"] & \overline{f(X)} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Donde π es la proyección canónica, $\overline{f}$ es la extensión natural de f al espacio cociente, i es la inclusión.

Se tiene que π es un operador cociente (sobreyectivo y acotado) e i es una inmersión isométrica. Los morfismos f para los cuales $\overline{f}$ es un isomorfismo son llamados **morfismos estrictos**. De esta manera, los **monomorfismos estrictos** son las inmersiones isométricas estrictas y los **epimorfismos estrictos** son los operadores cocientes estrictos.

Los epimorfismos y monomorfismos estrictos en $\underline{\text{Ban}}_1$ pueden ser caracterizados en términos categóricos:

Definición.
Sea $f : X \to Y$ morfismo en $\underline{\text{Ban}}_1$. Suponga que $f = m \circ e$ donde m es monomorfismo y e es epimorfismo entonces si esto implica que e es isomorfismo se dice que f es **monomorfismo extremo***; contrariamente si se sigue que m es isomorfismo entonces f es un* **epimorfismo extremo**.

Proposición 2.7.
Sea $f : X \to Y$ un morfismo en $\underline{\text{Ban}}_1$.

(i) f es monomorfismo extremo si y solamente sí f es monomorfismo estricto.

(ii) f es epimorfismo extremo si y solamente sí f es epimorfismo estricto.

Demostración.

(i) Sea $f : X \to Y$ monomorfismo estricto; es decir, una inmersión isométrica. Suponga que $f = m \circ e$. Entonces, teniendo en cuenta que f es isometría y que $||m||, ||e|| \leq 1$ se tiene que

$$||x|| = ||f(x)|| = ||m(e(x)|| \leq ||e(x)|| \leq ||x||$$

Por lo tanto e es una isometría sobreyectiva; y se sigue inmediatamente de la proposición **1.5** que e es isomorfismo.

Por otra parte sea f monomorfismo extremo y $f = i \circ \overline{f} \circ \pi$ su descomposición canónica. Luego $f = (i \circ \overline{f}) \circ \pi$, ya que $i \circ \overline{f}$ es monomorfismo y π es epimorfismo se tiene entonces que π es isomorfismo; es decir, π es la identidad de X. Por lo tanto $f = i \circ \overline{f}$, donde i es monomorfismo y $\overline{f}$ es epimorfismo (proposición **1.4**); así se tiene que $\overline{f}$ es isomorfismo; es decir, f es monomorfismo estricto.

(ii) Sea $f : X \to Y$ epimorfismo estricto y $f = m \circ e$. Considere $Z = ker(f)$. Entonces

$$\text{ínf}\{||x - z|| : z \in Z\} = ||f(x)|| = ||m(e(x))|| \leq ||e(x)|| = ||e(x - z)|| \leq ||x + z||$$

para todo $z \in Z$. Luego $||m(e(x))|| = ||e(x)||$ para todo $x \in X$ (propiedades del ínf); es decir, m es una isometría sobreyectiva (isomorfismo) ya que f es sobreyectiva.

Por otro lado sea f epimorfismo extremo y $f = i \circ \overline{f} \circ \pi$ su descomposición canónica. De manera análoga a lo anterior, i es un isomorfismo; es decir, $f(X) = Y$ y por lo tanto $f = \overline{f} \circ \pi$ implica que $\overline{f}$ es isomorfismo y se sigue que f es epimorfismo estricto.

□

Teorema 2.8 (Banach-Schauder)**.**
Un morfismo $f : X \to Y$ en $\underline{\text{Ban}}_1$ es epimorfismo estricto sí y solamente sí $f(B_X)$ es denso en B_Y; donde B_X,B_Y denotan la bola unitaria cerrada en X,Y respectivamente.

Demostración. Veamos que si $f(B_X)$ es denso en B_Y entonces f es sobreyectiva. En efecto; para $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $f(\frac{1}{2^n} B_X)$ es denso en $\frac{1}{2^n} B_Y$, así para $y \in B_Y$ existe un $x_1 \in X$ con $||x_1|| \leq 1$ y $||y - f(x_1)|| < \frac{1}{2}$. Para $y - f(x_1)$ existe $x_2 \in X$ con $||x_2|| \leq \frac{1}{2}$ y $||y - f(x_1) - f(x_2)|| \leq \frac{1}{2^2}$; continuando de esta manera, se obtiene una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $||x_n|| \leq \frac{2}{2^{n-1}}$ y $||y - f(\sum_{k=1}^{n} x_k)|| < \frac{1}{2^n}$. Ya que $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| \leq 2$ defina $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y por lo tanto $f(x) = y$; esto es, f es sobreyectivo.

Ahora sea $f = \overline{f} \circ \pi$ la descomposición canónica, ya que $\overline{f}$ es biyectivo; existe su inverso $\overline{g}$ en $\underline{\text{Ban}}_\infty$. Más aún

$$||\overline{g}|| = \sup_{||y||=1} ||\overline{g}(y)|| = \sup_{||x||=1} ||\overline{g}(f(x))|| = \sup_{||x||=1} ||\pi(x)|| = 1$$

Esto implica que $\overline{f}$ es isomorfismo en $\underline{\text{Ban}}_1$ y por lo tanto f es epimorfismo estricto.

□

2.2. Productos Y Coproductos en $\underline{\mathbf{Ban}}_1$

Definición.
Sea X espacio de Banach, J un conjunto de índices y $1 \leq p \leq \infty$. Se define

$$l_J^p(X) = \{(x_j)_{j\in J} : x_j \in X \text{ y } ||x_j||_p < \infty\}$$

El cual resulta ser un espacio de Banach.
En el caso en que J sea un conjunto no enumerable, para que $||x_j||_p$ tenga sentido es necesario que $x_j = 0$ para todo j excepto en un conjunto enumerable.

Proposición 2.9.
Para cada familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios de Banach, el producto $\prod_{i\in I} X_i$ existe y es (isoméricamente isomorfo a) el espacio de todos los elementos $x = (x_i)_{i\in I}$, $x_i \in X_i$ tales que

$$||x||_\infty = \sup_{i\in I} ||x_i|| < \infty$$

Los morfismos π_i son las proyecciones $\pi_i(x) = x_i$ y cada una de éstas es un operador cociente.

Demostración. Sea $g_i : Z \to X_i$ una familia de morfismos en $\underline{\mathrm{Ban}}_1$. Si existe $g : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ con la propiedad de conmutación; se debe tener que $\pi_i(g(z)) = g_i(z)$; es decir, $g(z) = (g_i(z))_{i\in I}$. Ya que

$$||g(z)||_\infty = \sup_{i\in I} ||g_i(z)|| \leq \sup_{i\in I} ||g_i|| ||z|| \leq ||z|| < \infty$$

si se define g de esta manera está bien definido; además

$$||g|| = \sup_{i\in I} ||g_i|| \leq 1$$

□

Note que en el caso particular en que $X_i = X$ para todo $i \in I$, se tiene que $\prod_{i\in I} X_i = l_I^\infty(X)$.

En $\underline{\mathrm{Ban}}_\infty$ los productos no existen en general, en efecto, suponga que $(\prod_{i\in I} X_i, \pi_i)$ fuese un producto de la familia $(X_i)_{i\in I}$. Entonces para cada familia de morfismos $g_i : Z \to X_i$ debería existir $g : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ tal que $g_i = \pi_i \circ g$ y por lo tanto $||g_i|| \leq ||g|| ||\pi_i||$. Si la familia $(g_i)_{i\in I}$ contiene una subsucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $||g_k|| > k||\pi_k||$; lo cual es inmediatamente imposible si tal producto existiese.

Proposición 2.10.
Para cada familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios de Banach, el coproducto $\coprod_{i\in I} X_i$ existe y es (isoméricamente isomorfo a) el espacio de todos los elementos $x = (x_i)_{i\in I}$, $x_i \in X_i$ tales que

$$||x||_1 = \sum_{i\in I} ||x_i|| < \infty$$

Los morfismos t_i son las inyecciones $t_i(x) = (\delta_{ij} x)_{j\in I}$ y cada una de éstas es una inmersión isométrica.

Demostración. Sea $g_i : X_i \to Z$ una familia de morfismos en $\underline{\text{Ban}}_1$. Si existe $g : \coprod_{i\in I} X_i \to Z$ con la propiedad de conmutación; se debe tener que $g(t_i(x)) = g_i(x)$; es decir, $g((x_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} g_i(x_i)$. Por otra parte, definiendo g de esta manera se obtiene que

$$||g((x_i)_{i\in I})|| = ||\sum_{i\in I} g_i(x_i)|| \leq \sum_{i\in I} ||g_i||\ ||x_i|| \leq \sum_{i\in I} ||x_i|| = ||x||_1$$

por lo tanto $||g|| \leq 1$, es decir g es morfismo en $\underline{\text{Ban}}_1$. □

En el caso en que $X_i = X$ para todo $i \in I$ se tiene que $\coprod_{i\in I} X_i = l^1_I(X)$. Además si I es un conjunto finito de índices los productos y coproductos en $\underline{\text{Ban}}_1$ son también productos y coproductos en $\underline{\text{Ban}}_\infty$ y estos son isomorfos en $\underline{\text{Ban}}_\infty$.

Por el mismo razonamiento anterior, se tiene que para un conjunto infinito de índices no existe el coproducto en la categoría $\underline{\text{Ban}}_\infty$. Si se prefiere trabajar en esta categoría se puede demostrar como en las proposiciones anteriores que los productos y coproductos existen para familias acotadas de morfismos; es decir, familias $(f_i)_{i\in I}$ tales que $\sup_{i\in I} ||f_i|| < \infty$.

3. Representación Categórica

Con las herramientas presentadas hasta ahora, y teniendo una fuerte traducción del lenguaje del análisis funcional a la teoría de Categorías; se presentarán teoremas de representación categórica de los espacios de Banach, donde se usará el hecho que en la categoría $\underline{\text{Ban}}_1$ existen límites y colímites para cualquier familia espectral.

Teorema 3.1 (Primer Teorema de Representación)**.**
Todo espacio de Banach sobre un cuerpo K es (isomorfo a) un espacio cociente del espacio $l^1_S(K)$ y a un subespacio cerrado del espacio $l^\infty_T(K)$ para algunos conjuntos de índices S y T.

Demostración. Para la primera afirmación, sea $(x_s)_{s\in S}$ un subconjunto denso en la bola unitaria cerrada B_X de X. Y considere $\pi : l^1_S(K) \to X$ definida por $\pi((\xi_s)) = \sum_{s\in S} \xi_s x_s$ para $(\xi_s) \in l^1_S(K)$. Entonces $\sum_{s\in S} ||\xi_s x_s|| \leq \sum_{s\in S} |\xi_s| = ||\xi||_1$ y ya que $(x_s)_{s\in S} \subseteq \pi B_{l^1_S(K)}$ entonces $\pi B_{l^1_S(K)}$ es denso en B_X; por el teorema de Banach-Schauder π es un operador cociente; es decir, $l^1_S(K)/ker(\pi) \cong X$.

Para la segunda afirmación; sea T un subconjunto $\omega*$-denso en $B_{X'}$ y defina $h : X \to l^\infty_T(K)$ por $h(x) = (f(x))_{f\in T}$. Por lo tanto ya que T es denso, $\sup_{f\in T} |f(x)| = ||x||$. Es inmediato a partir del teorema de Hanh-Banach que h es inyectiva. □

En el caso en que X sea un espacio de Banach separable, este es el cociente de l^1 y un subespacio de l^∞.

La primera afirmación del teorema anterior tiene una interpretación en la teoría de categorías; considere el funtor V :$\underline{\text{Ban}}_1 \to \underline{\textit{Set}}$ el cual asocia a cada espacio de Banach X su bola unitaria $VX = B_X$ y a cada morfismo $f : X \to Y$ su restricción $Vf = f|_{B_X}$. Ya que $||f|| \leq 1$ Vf está bien definido (si $||x|| \leq 1$ entonces $||f(x)|| \leq 1$).

Este funtor tiene adjunto izquierdo $l^1 : \underline{\text{Set}} \to \underline{\text{Ban}}_1$ el cual le asocia a cada conjunto S el espacio de Banach $l^1_S(K)$ y a cada morfismo $f : S \to T$ el morfismo $l^1_f : l^1_S(K) \to l^1_T(K)$ definido por

$l^1_f((\xi_s)) = (\eta_t)$ donde $\eta_t = \sum_{f(s)=t} \xi_s$, la cual está bien definida notando que $\sum_t |\eta_t| \leq \sum_s |\xi_s|$.

Para la adjunción $\underline{\mathrm{Ban}}_1(l^1_S, X) = \underline{\mathrm{Set}}(S, VX)$, tomando $f \in \underline{\mathrm{Ban}}_1(l^1_S, X)$ y $g \in \underline{\mathrm{Set}}(S, VX)$ se define $\overline{f} \in \underline{\mathrm{Set}}(S, VX)$ dada por $\overline{f}(s) = f((\delta_{st})_{t \in S})$ la cual inmediatamente está bien definida. Y se define $\overline{g} \in \underline{\mathrm{Ban}}_1(l^1_S, X)$ por $\overline{g}((\xi_s)) = \sum_{s \in S} \xi_s g(s)$ que igualmente está bien definida.

3.1. Límites en $\underline{\mathbf{Ban}}_1$

Proposición 3.2.
Sea D una categoría pequeña. Para toda familia espectral $(X_d)_{d \in D}$ el límite L existe en $\underline{\mathrm{Ban}}_1$ y coincide con el subespacio cerrado L de $\prod_{d \in D} X_d$ consistiendo de los $x = (x_d)_{d \in D}$ tales que $f_\delta(x_d) = x_{d'}$ para todo $d, d' \in D$ y $\delta : d \to d'$.

Demostración. L definido en la hipótesis de la proposición es un subespacio cerrado, ya que

$$L = \bigcap_{\substack{\delta : d \to d' \\ d, d'}} ker(f_\delta \circ (\pi_d - \pi_{d'}))$$

Más aún, de esta manera es evidente que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & X_d \arrow[dd, "f_\delta"] \\ L \arrow[ur, "\pi_d"] \arrow[dr, "\pi_{d'}"'] & \\ & X_{d'} \end{tikzcd}$$

Para alguna familia dada $g_d : Z \to X_d$ de morfismos que satisfacen $f_\delta \circ g_d = g_{d'}$ para todo $\delta : d \to d'$ considere $\Phi : Z \to \prod_{d \in D} X_d$ el funcional que resulta de la propiedad universal del producto, es claro que éste factoriza g_d.

$\square$

Ejemplo:
Considere D la categoría que consiste de dos objetos y dos morfismos distintos entre ellos. Un funtor de D en $\underline{\mathrm{Ban}}_1$ es una familia $\{f.g\}$ de dos morfismos $f, g : X \to Y$ donde X, Y son espacios de Banach. El límite L de esta familia espectral es un espacio de Banach con dos morfismos $\pi_1 : L \to X$, $\pi_2 : L \to Y$ tales que $\pi_2 = f \circ \pi_1 = g \circ \pi_1$, y L es un subespacio cerrado del producto $X \times Y$ que consiste de todas las parejas (x, y) que satisfacen $y = f(x) = g(x)$, es decir, $(f - g)(x) = 0$. Entonces L puede ser identificado con el subespacio cerrado de X, $ker(f - g)$.

Corolario 3.3.
En la categoría $\underline{\mathrm{Ban}}_1$ para cualquier par de morfismos $f : X \to A$ y $g : Y \to A$ existe el pullback P de éstos dos morfismos.

Demostración. P es el subespacio del producto $X \times Y \times A$ que consiste de todos los $(x, y, a = f(x) = g(y))$; y puede ser identificado con el subespacio de $X \times Y$ consistente por las parejas (x, y) que satisfacen $f(x) = g(y)$.

En el caso $g = 0$, $P = (ker(f) \times Y)$, si g es una isometría $P = f^{-1}(g(y))$ y si f, g son isometrías $P = X \cap Y$. $\square$

Proposición 3.4.
Sea $G_x : X \to X''$ la inmersión canónica de un espacio de Banach X en su bidual X''. Sea M un subespacio cerrado de X y $i : M \to X$ la correspondiente inclusión. El siguiente diagrama conmuta y es un pullback.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "G_m"'] & X \arrow[d, "G_x"] \\ M'' \arrow[r, "j"'] & X'' \end{tikzcd}$$

Demostración. Por el teorema de Hanh-Banach $j : M'' \to X''$ donde $j(n)(f) = n(f\,|_M)$ para $n \in M''$ es una isometría; por tanto M'' y X pueden ser interpretados como subespacios de X''. Se afirma que $M = X \cap M''$.

Veamos que si dado $n \in M''$ existe $x \in X$ tal que $G_x(x) = j(n)$ entonces $x \in M$. Suponga que $x \notin M$, entonces por el teorema de Hanh-Banach existe $f \in X'$ tal que $f\,|_M = 0$ y $f(x) \neq 0$. Pero entonces se debería tener qué

$$0 = n(0) = n(f\,|_M) = j(n)(f) = G_x(x)(f) = f(x)$$

Lo cual es una contradicción. Por lo tanto $x \in M$ y se tiene entonces que $n = G_m(m)$. Por la caracterización del Pullback se sigue el resultado deseado. □

Corolario 3.5.
Sea M subespacio cerrado de X reflexivo. Entonces M es reflexivo.

Demostración. Considere el diagrama

$$\begin{tikzcd} M'' \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "(G_x)^{-1}\circ j"] \arrow[ddr, "id_{M''}"'] & & \\ & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "G_m"] & X \arrow[d, "G_x"] \\ & M'' \arrow[r, "j"'] & X'' \end{tikzcd}$$

Ya que X es reflexivo $G_x : X \to X''$ es un isomorfismo y por lo tanto invertible. Ya que el cuadrado es un pullback, existe un único morfismo $f : M'' \to M$ tal que $G_m \circ f = id_{M''}$, es decir, G_m es sobreyectiva y por tanto M es reflexivo. □

Teorema 3.6 (Segundo Teorema de Representación)**.**
Sea X un espacio de Banach y sea D la categoría cuyos objetos son los subespacios cerrados $M \subseteq X$ con codimension finita y cuyos morfismos son las respectivas inclusiones entre esos espacios. Toda inyección $i_{MN} : M \to N$ define un operador cociente $\pi_{MN} : X/M \to X/N$.
Entonces $\varprojlim X/M = X''$

Demostración. Para $\pi : X \to X/M$ operador cociente existe una inmersión isométrica adjunta $\pi' : (X/M) \to X'$; cuya imagen coincide con el ω^*-cerrado $M^\perp = \{f \in X' : f(m) = 0 \forall m \in M\}$ de X'.

Sean M, N de finita codimensión con $M \subseteq N$; considere $\pi_M : X \to X/M$ la proyección canónica. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[dr, "\pi_N"'] & X/M \arrow[d, "\pi_{MN}"] \\ & X/N \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, para los operadores adjuntos el diagrama respectivo conmuta

$$\begin{tikzcd} N^\perp \arrow[r, "\pi'_{MN}"] \arrow[dr, "\pi'_N"'] & M^\perp \arrow[d, "\pi'_M"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

Ya que X/M es de dimensión finita, es reflexivo, por lo tanto $(X/M)'' = (M^\perp)' = X/M$. Se define $f_M : X'' \to X/M$ por $f_M(g) = \pi''_M(g)$. Entonces el diagrama conmuta para todo M, N con codimensión finita.

$$\begin{tikzcd} & X/M \arrow[dd, "\pi_{MN}"] \\ X'' \arrow[ur, "f_M"] \arrow[dr, "f_N"'] & \\ & X/N \end{tikzcd}$$

Ahora suponga que existe un espacio de Banach Z y una familia de morfismos $g_M : Z \to X/M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} & X/M \arrow[dd, "\pi_{MN}"] \\ Z \arrow[ur, "g_M"] \arrow[dr, "g_N"'] & \\ & X/N \end{tikzcd}$$

conmuta. Si existiese $\varphi : Z \to X''$ tal que $g_m = f_m \circ \varphi$ se debe tener que $g_M = \pi''_M \circ \varphi$, es decir, $h(g_M(z)) = \varphi(z)(\pi'_M(h))$ para todo $h \in M^{\perp}$. Veamos que definiendo φ de esta manera está bien definida. Este hecho se sigue de que para $M \subseteq N$ y $h \in N^{\perp}$ se tiene que

$$h(g_N(z)) = h(\pi_{MN} g_M(z)) = \pi'_{MN}(h(g_M(z))) = h(g_M(z))$$

y es inmediato que $||\varphi|| \leq$ ya que $||g_M|| \leq 1$ para todo M.

$\square$

3.2. Colímites en $\underline{\mathbf{Ban}}_1$

Proposición 3.7.
Sea D una categoría pequeña. Para toda familia espectral $(X_d)_{d\in D}$ el límite $\varinjlim X_d$ existe en $\underline{\mathrm{Ban}}_1$ y coincide con el espacio cociente $R = \coprod_{d\in D} X_d / N$, donde N es la adherencia del subespacio de $\coprod_{d\in D} X_d$ generado por todos los elementos de la forma $t_d(x_d) - t_{d'}(f_\delta(x_d))$ para todo $x_d \in X_d$ y $\delta : d \to d'$.

Demostración. Dado $(g_d) : (X_d) \to Z$. Existe $g : \coprod_{d\in D} X_d \to Z$. Ya que

$$g(t_d(x_d) - t_{d'}(f_\delta(x_d))) = g_d(x_d) - g_{d'}(f_\delta(x_d)) = 0$$

Por lo tanto $N \subseteq ker(g)$ y de esta manera se puede factorizar $\coprod_{d\in D} X_d$ a través de R. $\square$

El cokernel, el límite de la familia espectral $\{X, Y\}$ indexada por la categoría D consistente por dos objetos y dos morfismos entre ellos; existe en la categoría $\underline{\mathrm{Ban}}_1$ y coincide con el espacio $R = (X \amalg Y)/N$ donde N es la adherencia del subespacio generado por los elementos de la forma $(x, -f(x))$, $(x, -g(x))$; es decir, $R = Y/\overline{(f-g)(X)}$. En el caso $g = 0$, entonces $R = Y/\overline{f(x)}$ y se denota el espacio cokernel de f

Como consecuencia de la proposición anterior los pushout existen en $\underline{\mathrm{Ban}}_1$; y en este caso, el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr] & \\ Y \arrow[r] \arrow[drr] & R \arrow[dr, dotted] & \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Es equivalente al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "t_1 \circ f", "t_2 \circ g"'] & X \amalg Y \arrow[r] & Z \\ & R & \end{tikzcd}$$

Donde $t_1(x) = (x, 0)$ y $t_2(y) = (0, y)$. Entonces se tiene que $R = (X \amalg Y)/\overline{\{(f(a), -g(a)) : a \in A\}}$.

Teorema 3.8 (Tercer Teorema de Representación)**.**
Todo espacio de Banach es el colímite de sus espacios de dimensión finita.

Demostración. Sea D el conjunto de todos los subespacios M de X con dimensión finita; y sea $t_{MN} : M \to N$ la inclusión para $M \subseteq N$. Entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "t_N"] & X \\ M \arrow[u, "t_{MN}"] \arrow[ur, "t_M"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $t_M : M \to X$ es la inclusión. Suponga que $g_M : M \to Z$ es una familia de morfismos tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "g_N"] & Z \\ M \arrow[u, "g_{MN}"] \arrow[ur, "g_M"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Si existe $g : X \to Z$ tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g_M"] \arrow[d, "t_M"'] & Z \\ X \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

conmute, se debe tener que $g(t_M) = g_M$, es decir $g(m) = g_M(m)$ para todo $m \in M$. En particular, considerando $M = gen(x)$ para $x \in X$ se tiene que $g(x) = g_M(x)$; así se define un funcional lineal $g : X \to Z$ y $||g|| \leq \sup_M ||g_M|| \leq 1$.

$\square$

Teorema 3.9 (Cuarto Teorema de Representación)**.**
Todo espacio de Banach X puede ser representado como un colímite de espacios $l_n^1(K)$ para algunos $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea X espacio de Banach. Se define una categoría D de la siguiente manera. Los objetos de D son las parejas $d = (l_n^1(K), f_d)$ donde $f_d : l_n^1(K) \to X$ es un morfismo. En este caso

$$f_d((\xi_1, \ldots \xi_n)) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$$

para algunos $x_i \in X$ con $||x_i|| \leq 1$.

Los morfismos de D son los morfismos $\alpha : l^1_n(K) \to l^1_m(K)$ tales que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} l^1_n(K) \arrow[r, "f_d"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \\ l^1_m(K) \arrow[ur, "f_{d'}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta si $d = (l^1_n(K), f_d)$ y $d' = (l^1_m(K), f_{d'})$. Ahora defina $(X_d)_{d\in D}$ la familia espectral com la proyección de la primera coordenada de d, es decir, si $d = (l^1_n(K), f_d)$ entonces $X_d = l^1_n(K)$.

Se afirma que $\lim\limits_{\rightarrow} X_d = X$. Sea $f_d : l^1_n(K) \to X$ arbitrario y tome $\xi_0 \in l^1_n(K)$, $x_0 \in X$ tales que $f_d(\xi_0) = x_0$ y $\xi_0 \neq 0$. Defina $d_0 = (K, f_{d_0})$ por $f_{d_0}(1) = \frac{x_0}{||\xi_0||_1}$. Entonces $d_0 \in D$ ya que $||x_0|| \leq ||\xi_0||_1$.

Ahora sea $\alpha : K \to l^1_n(K)$ definida por $\alpha(1) = \frac{\xi_0}{||\xi_0||}$. Es inmediato que $||\alpha|| = 1$ y que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f_{d_0}"] \arrow[d, "\alpha"'] & X \\ l^1_n(K) \arrow[ur, "f_d"'] & \end{tikzcd}$$

Ahora sea $g_d : X_d \to Z$ una familia de morfismos tales que todos los diagramas

$$\begin{tikzcd} l^1_n(K) \arrow[r, "g_d"] \arrow[d, "\alpha"'] & Z \\ l^1_m(K) \arrow[ur, "g_{d'}"'] & \end{tikzcd}$$

conmutan. Si existe un morfismo $g : X \to Z$ tal que $g \circ f_d = g_d$ se debe tener que $g(f_d(\xi)) = g_d(\xi)$. Veamos en efecto que esta es una buena definición, en efecto, sea $f_d(\xi) = f_{d'}(\xi')$ veamos que $g_d(\xi) = g_{d'}(\xi')$. Dados $f_d(\xi)$ y $f_{d'}(\xi')$, construya, como antes, d_0, α y d'_0, α' para cada uno de éstos. Suponga que $||\xi'||_1 \leq ||\xi||_1$ y sea $\lambda = \frac{||\xi'||_1}{||\xi||_1}$, entonces $|\lambda| \leq 1$ y además el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f_{d_0}"] \arrow[d, "\lambda"'] & X \\ K \arrow[ur, "f_{d'_0}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\lambda(k) = \lambda k'$. Por lo tanto

$$\begin{tikzcd} l^1_n(K) & K \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\lambda"] & K \arrow[r, "\alpha'"] & l^1_m(K) \end{tikzcd}$$

es un diagrama en D y así se sigue que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
l_n^1(K) \arrow[dr, "g_d"'] & K \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "g_{d_0}"] & K \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[dl, "g_{d'_0}"'] & l_m^1(K) \arrow[dll, "g_{d'}"] \\
 & Z & &
\end{tikzcd}$$

Esto es,

$$g_d(\alpha(1)) = g_{d_0}(1) = g_{d'_0}(\lambda) = g_{d'}(\lambda\alpha'(1))$$

o equivalentemente

$$g_d(\frac{\xi}{||\xi||}) = g_{d_0}(1) = \lambda g_{d'_0}(1) = g_{d'}(\frac{\xi'}{||\xi'||})$$

Lo cual implica que

$$g_d(\xi) = ||\xi||\lambda\frac{1}{||\xi'||}g_{d'}(\xi') = g_{d'}(\xi')$$

De aquí se sigue que g está bien definida.

La linealidad de g se sigue por notar que dados $x, y \in X$ las parejas $(K, f_0), (K, f_1), (K \times K, f_2)$ donde

$$f_0(1) = \frac{x}{||x||},\ f_1(1) = \frac{y}{||y||},\ f_2(\lambda, \mu) = \lambda\frac{x}{||x||} + \mu\frac{y}{||y||}$$

son elementos de D y $\alpha_0, \alpha_1 : K \to K \times K$ con $\alpha_0(1) = (1, 0)$ y $\alpha_1(1) = (0, 1)$ morfismos.

Por lo tanto $g : X \to Z$ es un operador lineal y además

$$||g|| = \sup_{||x|| \leq} ||g(x)|| \leq 1.$$

ya que para todo $x \in X$ existe $d = (K, f_d)$ con $f_d(1) = \frac{x}{||x||}$ y por lo tanto

$$||g(x)|| = ||g(f_d(||x||))|| = ||g_d(||x||)|| \leq ||x||.$$

$\square$

Referencias Bibliográficas

[1] Michor. Peter W, *Functors and Categories of Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, (1978).

[2] Cigler, Losert and Michor, *Banach Modules and Functors on Categories of Banach Spaces*, University of Vienna, (1979).

[3] Kreysig. Erwin, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Universiy of Windsor, (1989).

[4] Mac Lane. Saunders, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York, (1971).