Teorema de Glivenko para la Lógica Intuicionista Modal

Presentado por: Sergio Chaves
Trabajo Final Pregrado
Tutor: Dr. Fernando Zalamea
Universidad Nacional de Colombia

Noviembre de 2010

Índice

1. Introducción

El teorema de Glivenko relaciona fuertemente propiedades sintácticas entre la lógica intuicionista y la lógica clásica, donde se presenta explícitamente una dualidad entre el "derecho" y el "revés" que se presenta en varias ocasiones en la matemática. El tratar de extender este teorema de manera natural a una versión modal no es un hecho fácil de prever o realizar; ya que debido a que en la lógica modal normal todas las modalidades son posibles, debe escogerse cuidadosamente cual lógica supernormal adoptar para enunciar una versión modal del teorema.

El objetivo a realizar, será probar una versión del teorema de Glivenko para la lógica intuicionista modal introducida por Arthur Prior, la cual implicará una extensión natural a la lógica supernormal **S5**. Aunque el objetivo sea llegar a este teorema, la esencia principal estará centrada en el estudio de la semántica y de propiedades estructurales detrás de éstas lógicas, lo cual va a converger a pruebas sintácticas que permitirán concluir el teorema.

De esta manera, la motivación del teorema de Glivenko, es una sucinta excusa para realizar una fuerte teoría de dualidad y representación que conlleva la lógica en sí. Como ha de esperarse, tal dualidad permite una fuerte dialéctica en la que algún concepto o propiedad transmigra de un lado a otro, lo que permitirá un estudio intrínseco de los mismos ya que será visto desde distintas facetas. Como consecuencia de esta fuerte dualidad que se realizará, se presentará una demostración alternativa del teorema de Glivenko intuicionista, la cual servirá de base para forjar una extensión natural del teorema de Glivenko Modal.

2. Álgebras Monádicas de Heyting

Sea $(P, \leq)$ conjunto parcialmente ordenado, sea $x \in P$ y $A \subseteq P$. Se definen

$$R(x) = \{y \in P | x \leq y\}, \quad R(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$$

$$R^{-1}(x) = \{y \in P | y \leq x\}, \quad R^{-1}(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$$

Note que $A \subseteq R(A)$ y $A \subseteq R^{-1}(A)$

Definición.
Sea $(P, \leq)$ conjunto parcialmente ordenado. $A \subseteq P$ es un **cono** *si $R(A) = A$. Si $R^{-1}(A) = A$ se dice que A es* **cono descendente**.

Proposición 2.1.
Sea $(P, \leq)$ conjunto parcialmente ordenado. $A \subseteq P$. Entonces,

(1) A es un cono si y solamente sí $(R^{-1}(A^c))^c = A$

(2) A es un cono descendente si y solamente sí $(R(A^c))^c = A$

Demostración.
Para la parte (1), suponga que A es un cono y sea $x \in R^{-1}(A^c)$, es decir, $x \leq y$ para algún $y \in A^c$; por ser A cono es imposible que $x \in A$, por tanto $x \in A^c$. De esta manera $R^{-1}(A^c) \subseteq A^c$. La otra contenencia se obtiene a partir de las definiciones. La parte (2) se prueba de manera análoga. □

Definición.
Sea L un retículo, un **ideal** *I de L, es un subconjunto de L, que satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\emptyset \neq I \neq L$.

(2) $x \in I, y \in L \Longrightarrow x \wedge y \in I$

(3) $x, y \in I \Longrightarrow x \vee y \in I$

Si además I es un ideal tal que si $x \wedge y \in I$ implica $x \in I$ o $y \in I$, se dice que I es un **ideal primo** de L.

Sea A un subconjunto de L. El conjunto

$$(A] = \{x \in L | x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n \text{ para algunos } a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

se conoce como el ideal generado por A. Caso $A = \{a\}$, se notará $(a]$ y se tiene que $(a] = R^{-1}(a)$.

Definición.
Sea L un retículo, un **filtro** *F de L, es un subconjunto de L, que satisface las siguientes condiciones:*

(1) $\emptyset \neq F \neq L$.

(2) $x \in F, y \in L \Longrightarrow x \vee y \in F$

(3) $x, y \in F \Longrightarrow x \wedge y \in F$

Un filtro F es un **filtro primo** si $x \vee y \in F$ implica $x \in F$ o $y \in F$. De igual manera dado $A \subseteq L$ se define el filtro generado por A como el conjunto

$$[A) = \{x \in L | a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq x \text{ para algunos } a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

Si $A = \{a\}$, se notará $[a)$ y se tiene que $[a) = R(a)$.

Es fácil mostrar que todo ideal de un retículo es un cono descendente, y que todo filtro de un retículo es un cono. Las recíprocas en general no son ciertas.

Teorema 2.2 (Teorema del Filtro Primo)**.**
Sea L retículo, I ideal en L y F filtro en L tales que $F \cap I = \emptyset$. Entonces existe P filtro primo de L tal que $F \subseteq P$ y $I \cap P = \emptyset$.

Demostración. Lema de Zorn □

Dado un filtro F sobre un retículo L, puede asociarse una relación de congruencia sobre L, dada por $a \equiv_F b \Longleftrightarrow$ existe $u \in F$ tal que $a \wedge u = b \wedge u$. No existe dificultad en comprobar que tal definición efectivamente es una relación de equivalencia. El retículo $L/\equiv_F$ será denotado por L/F y se conoce como el **Retículo cociente asociado a** F.

Definición.
Sea H álgebra de Heyting, un elemento $a \in H$ se dice **regular** *si $a = \neg\neg a$ donde $\neg a$ denota el pseudo-complemento de a. Además si a es tal que $\neg\neg a = 1$ entonces a es un elemento* **denso**.

Dada un álgebra de Heyting H, el conjunto $R(H)$ de todos los elementos regulares de H constituye un álgebra booleana, y además la aplicación $\neg\neg : H \to R(H)$ es un homomorfismo de álgebras de Heyting. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.3.
Dada un álgebra de Heyting H, existe F filtro tal que $R(H) \simeq H/F$.

Demostración.
Por el teorema de Birkhoff, el enunciado de tal proposición es inmediato; no obstante, el objetivo de esta proposición es construir explícitamente el filtro F. Considere F el conjunto de todos los elementos densos de H, el cual es un subconjunto propio de H $(\neg\neg 0 = 0)$; además usando el hecho de que $\neg\neg$ es homomorfismo se tiene que F es un filtro, ya que dados $a, b \in F$ y $c \in H$, entonces $\neg\neg(a \wedge b) = \neg\neg a \wedge \neg\neg b = 1 \wedge 1 = 1$ y $\neg\neg(a \vee c) = \neg\neg a \vee' \neg\neg c = 1 \vee' \neg\neg c = 1$. Este filtro se denotará por F_D. Por lo tanto el homomorfismo natural $h : R(H) \to H/F_D$ dado por $h(a) = a/F_D$ es el isomorfismo deseado. □

Definición.
Un **álgebra monádica de Heyting** *es una tripla* $(H, \forall, \exists)$ *donde* H *es un álgebra de Heyting y* $\forall, \exists : H \longrightarrow H$ *(llamados "cuantificadores") son operadores que satisfacen las siguientes condiciones. Para todo* $a, b \in H$*:*

(1) $\forall a \leq a$.

(2) $a \leq \exists a$.

(3) $\forall(a \wedge b) = \forall a \wedge \forall b$

(4) $\exists(a \vee b) = \exists a \vee \exists b$

(5) $\forall 1 = 1$.

(6) $\exists 0 = 0$.

(7) $\forall\exists a = \exists a$.

(8) $\exists\forall a = \forall a$.

(9) $\exists(\exists a \wedge b) = \exists a \wedge \exists b$.

En el caso en que H *sea un álgebra booleana, se tiene dice entonces que* $(H, \forall, \exists)$ *es un* **álgebra monádica booleana**.

Para cualquier álgebra monádica de Heyting $(H, \forall, \exists)$, el conjunto $H_0 = \{\forall a : a \in H\}$ forma una subálgebra de Heyting **relativamente completa**, es decir, para cualquier $a \in H$, los conjuntos $\{b \in H_0 : b \leq a\}$ y $\{b \in H_0 : a \leq b\}$ tienen supremo e ínfimo respectivamente.

Lema 2.4.
Sea $(H, \forall, \exists)$ *álgebra monádica de Heyting. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(1) $\forall, \exists$ *son operadores monótonos, es decir, para todo* $a, b \in H$, $a \leq b \Longrightarrow \forall a \leq \forall b$, $\exists a \leq \exists b$.

(2) Para todo $a \in H$, $\forall\forall a = \forall a$, $\exists\exists a = \exists a$.

Demostración.
Para la parte (1), si $a \leq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$, por tanto $\forall(a \wedge b) = \forall a$. Por la propiedad (3) de álgebras monádicas de Heyting, se tiene que $\forall a \wedge \forall b = \forall a \Longleftrightarrow \forall a \leq \forall b$. De la misma manera se usa la propiedad (4) y el hecho de $a \leq b \Longleftrightarrow a \vee b = b$.

Para probar (2), aplicando la propiedad (7) a $\forall a$ se obtiene $\forall\exists\forall a = \exists\forall a = \forall a$ (usando (8)); por otro lado, aplicando a la propiedad (8) el operador $\forall$, se obtiene $\forall\exists\forall a = \forall\forall a$; se sigue inmediatamente el resultado. La igualdad $\exists\exists a = \exists a$ se demuestra de manera similar. □

Corolario 2.5.
H_0 es una subálgebra de Heyting relativamente completa.

Teorema 2.6.
Existe una correspondencia biyectiva entre la colección de álgebras monádicas de Heyting $(H, \forall, \exists)$ y las parejas (H, H_0) donde H_0 es una subálgebra de H, relativamente completa.

Demostración.
El lema anterior asegura que a cada álgebra monádica de Heyting puede asociarse una pareja (H, H_0) donde H_0 es una subálgebra relativamente complementada. Contrariamente, a cada pareja (H, H_0) puede asociarse un álgebra monádica de Heyting $(H, \forall, \exists)$, definiendo para cada $a \in H$, $\forall a = \sup\{b \in H_0 : b \leq a\}$, y $\exists a = \text{ínf}\{b \in H_0 : a \leq b\}$; no existe dificultad alguna en verificar que estas definiciones satisfacen las propiedades enunciadas en la definición de álgebra monádica de Heyting. $\square$

Definición.
Sea $(H, \forall, \exists)$ álgebra monádica de Heyting y F filtro sobre H. F se dice **filtro monádico** *si $a \in F \Longrightarrow \forall a \in F$.*

Proposición 2.7.
Sea $(H, \forall, \exists)$ álgebra monádica de Heyting. Un filtro F es monádico si y solamente sí $F = [F \cap H_0)$.

Demostración.
Suponga que F es un filtro monádico, si $x \in [F \cap H_0)$ entonces $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \leq x$ para algunos $a_i \in F \cap H_0$; ya que F es filtro se tiene inmediatamente que $x \in F$. Por el contrario, si $x \in F$ se tiene que $\forall x \in F \cap H_0$ (F monádico), además $\forall x \leq x$ implica que $x \in [F \cap H_0)$.

Para el otro sentido de la equivalencia, suponga que $F = [F \cap H_0)$ y sea $x \in F$, existe $y \in F \cap H_0$ tal que $y \leq x$; por lo tanto aplicando el operador $\forall$ se obtiene, $y = \forall y \leq \forall x$, así $\forall x \in F$ de donde se concluye que F es monádico. $\square$

En un álgebra monádica de Heyting $(H, \forall, \exists)$ el conjunto F_D de todos los elementos densos no es en general un filtro monádico; así deben introducirse los siguientes conceptos para construir de manera natural un filtro monádico.

Definición.
Un elemento $a \in H$ álgebra monádica de Heyting se dice **super denso** *si $\neg\neg\forall a = 1$. El conjunto de todos los elementos super densos será denotado por F_{SD}*

Proposición 2.8.
Sea $(H, \forall, \exists)$ álgebra monádica de Heyting, entonces F_{SD} es un filtro monádico y además $F_{SD} \subseteq F_D$

Demostración.
Sean $a, b \in F_{SD}$ y $c \in H$, luego $\neg\neg\forall(a \wedge b) = \neg\neg\forall a \wedge \neg\neg\forall b = 1 \wedge 1 = 1$. Por otro lado $1 = \neg\neg\forall a \vee \neg\neg\forall c \leq \neg\neg\forall(a \wedge b)$ usando el hecho de que $\forall$ es un operador monótono y $\neg\neg$ es homomorfismo; además $\neg\neg\forall\forall a = \neg\neg\forall a = 1$. Así se obtiene que $a \wedge b$, $a \vee c$, $\forall a \in F_{SD}$.

Ya que $\neg\neg\forall a \leq \neg\neg a$ se tiene entonces que $F_{SD} \subseteq F_D$. $\square$

3. Espacios de Esakia

Un **espacio topológico ordenado** está dado por $(X, \Omega, \preceq)$ donde (X, Ω) es un espacio topológico y $(X, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. La colección de todos los subconjuntos clopen de X que son conos (respecto al orden $\preceq$) se notará $CON(X)$. Además, si para cada $x \in X$, $R(x)$ es cerrado, se dice que $\preceq$ es **cerrado puntualmente.**

Definición.
Un espacio topológico ordenado $(X, \Omega, \preceq)$ es un **espacio de Esakia** *si tiene las siguientes propiedades:*

(1) X posee una base de clopen.

(2) X es un espacio compacto.

(3) X es Hausdorff.

(4) $\preceq$ es cerrado puntualmente.

(5) Para cualquier $A \in \Omega$, $A \in CP(X) \Longrightarrow R^{-1}(A) \in CP(X)$.

Donde $CP(X)$ denota la colección de los conjuntos "clopen" de X.

Si en un espacio topológico $(X, \Omega, \preceq)$, $\preceq$ es una relación de preorden que satisface las condiciones $(4), (5)$ de la definición anterior; se dice que $\preceq$ es una **relación de Esakia**.

Teorema 3.1 (Separación de Prestley)**.**
Sea $(X, \Omega, \preceq)$ espacio de Esakia. Si $x \npreceq y$, existe $U \in CON(X)$ tal que $x \in U$, $y \notin U$.

Demostración.
Suponga que $x \npreceq y$. Ya que $\preceq$ es cerrado puntualmente, $R(x)$ es cerrado y por tanto compacto; además $y \notin R(x)$. Dado $z \in R(x)$, $z \npreceq y$, puesto que X es Hausdorff, existen U_z, U_y^z clopen, tales que $z \in U_z, y \in U_y^z$ y $U_z \cap U_y^z = \emptyset$. De esta manera, $R(x) \subseteq \bigcup_{z \in R(x)} U_z$, por la compacidad de $R(x)$, existen $z_1, \ldots, z_n \in R(x)$, tales que $R(x) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{z_i}$.
Sea $V = \bigcap_{i=1}^n U_y^{z_i}$. V es clopen, se sigue que $R^{-1}(V)$ es clopen y cono descendente; es inmediato que $y \in R^{-1}(V)$ y $x \notin R^{-1}(V)$. Así $x \in U = (R^{-1}(V))^c$ y $U \in CON(X)$. $\square$

Teorema 3.2 (Separación de Esakia)**.**
Sea $(X, \Omega, \preceq)$ espacio de Esakia. Sea A cono cerrado y B cono descendente cerrado. Si $A \cap B = \emptyset$, existe $U \in CON(X)$ tal que $A \subseteq U$ y $B \cap U = \emptyset$.

Demostración.
Suponga que $A \cap B = \emptyset$. Note que para todo $x \in A$, $y \in B$, $x \npreceq y$. Dado $x \in A$, $y \in B$ existe $U_x^y \in CON(X)$ (separación de Prestley), con $x \in U_x^y$, $y \notin U_x^y$.
Así

$$\bigcap_{y \in B} U_x^y \cap B = \emptyset.$$

Por la propiedad de intersección finita (X es compacto), existen $y_1, \ldots, y_{n_x} \in B$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n_x} U_x^{y_i} \cap B = \emptyset.$$

Sea $U_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} U_x^{y_i}$, $U_x \in CON(X)$. De esta manera, $A \subseteq \bigcup_{x\in A} U_x$ y $\bigcup_{x\in A} U_x \cap B = \emptyset$. Ya que A es compacto (es cerrado por hipótesis), existen $x_1, \dots, x_m \in A$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$. Así $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \in CON(X)$ es el deseado. $\square$

4. Lógica intuicionista modal

Definición.
La lógica intuicionista modal **Mipc** *es el sistema lógico formado por los axiomas intuicionistas adicionando los siguientes modales:*

(M1) $\Box\alpha \to \alpha$

(M2) $\alpha \to \Diamond\alpha$

(M3) $(\Box\alpha \wedge \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta)$

(M4) $\Diamond(\alpha \vee \beta) \to (\Diamond\alpha \vee \Diamond\beta)$

(M5) $\Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

(M6) $\Diamond\Box\alpha \to \Box\alpha$

(M7) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Diamond\alpha \to \Diamond\beta)$

Con las reglas de deducción, Modus Ponens (MP) y necesitación.

Dada un álgebra monádica de Heyting $(H, \forall, \exists)$ interpretando $\forall, \exists$ como $\Box, \Diamond$ respectivamente (y los demás conectivos naturalmente). Se tiene que $(H, \forall, \exists) \models$ **Mipc**.

La lógica modal **S5** es la lógica supernormal obtenida de la siguiente manera, $K \oplus \{T, 4, B\}$ donde $T, 4, B$ corresponden a los axiomas:

(T) $\Box\alpha \to \alpha$

(4) $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

(B) $\alpha \to \Box\Diamond\alpha$

Dada un álgebra monádica booleana $(B, \forall, \exists)$, se tiene entonces que $(B, \forall, \exists) \models$ **S5**.

En la lógicas supernormales; el operador de posibilidad $\Diamond$ puede ser caracterizado de la siguiente manera: $\Diamond\alpha \longleftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$. Teniendo esto en cuenta puede demostrarse el siguiente hecho.

Proposición 4.1.
S5 *es una extensión de* **Mipc**, *es decir,* **Mipc** $\subseteq$ **S5**.

Demostración.
Para esto basta mostrar que $\vdash_{S5} \alpha$ donde α es axioma de **Mipc**. En efecto, si $\alpha =$(M1), entonces $\alpha = (T)$ y por lo tanto $\vdash_{S5} \alpha$. Si $\alpha =$ (M2) entonces

$$\vdash_{S5} \alpha \to \Box\Diamond\alpha \qquad \text{axioma (B)} \qquad (1)$$
$$\vdash_{S5} \Box\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha \qquad \text{axioma (T) con } \Diamond\alpha \qquad (2)$$
$$\vdash_{S5} \alpha \to \Diamond\alpha \qquad \text{(MP), (1), (2)} \qquad (3)$$

El axioma (M3) es válido en cualquier lógica supernormal. Se tiene que $\vdash_{S5}$ (M4) gracias al hecho de que $\Diamond\alpha \longleftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$. Si $\alpha =$(M5), note primero que de los axiomas (T),(4) se tiene que $\vdash_{S5}$ $\Diamond\alpha \longleftrightarrow \Diamond\Diamond\alpha$. Por lo tanto se tiene que $\vdash_{S5} \Box\Diamond\alpha \longleftrightarrow \Box\Diamond\Diamond\alpha$ así

$$\vdash_{S5} \Diamond\alpha \to \Box\Diamond\Diamond\alpha \qquad \text{axioma } (B) \text{ con } \Diamond\alpha \qquad (1)$$
$$\vdash_{S5} \Box\Diamond\Diamond\alpha \longleftrightarrow \Box\Diamond\alpha \qquad (2)$$
$$\vdash_{S5} \Diamond\alpha \to \Box\Diamond\alpha \qquad \text{(MP),(1),(2)} \qquad (3)$$

De $\vdash_{S5}$(M5) se tiene que $\vdash_{S5}$ (M6) usando nuevamente que $\Diamond\alpha \longleftrightarrow \neg\Box\neg\alpha$. Finalmente si $\alpha =$(M7), entonces por el teorema de completitud para $S5$ (la semántica completa para esta lógica son los marcos reflexivos, simétricos y transitivos) se verifica entonces que $\vdash_{S5}$(M7).

□

Definición.
Se dice que L es una lógica intermedia sobre **Mipc**, *si* **Mipc** $\subseteq L \subseteq$ **S5**.

Definición.
Una fórmula modal A se dice **completamente modalizada** *si toda ocurrencia de una variable proposicional en A aparece en el campo de aplicación de $\Box$ o $\Diamond$. Si la fórmula A es tal que toda ocurrencia de una variable proposicional en A aparece inmediatamente después de $\Box$ o $\Diamond$, entonces A es una fórmula* **fuertemente modalizada**.

Proposición 4.2.
Sea L lógica intermedia sobre **Mipc** *y A fórmula completamente modalizada, entonces*

$$L \vdash \Box A \longleftrightarrow A$$

Demostración.
Usando que $L \vdash \Box\Box p \longleftrightarrow \Box p, \Box\Diamond p \longleftrightarrow \Diamond p$ y por inducción en fórmulas se obtiene el resultado. □

Considere la lógica intermedia sobre **Mipc**, **Mipc**$\oplus(\Diamond p \longleftrightarrow \neg\Box\neg p)$. Esta lógica es conocida como "**S5** débil" y se denota por **WS5**. A continuación serán enunciadas algunas propiedades de **WS5**.

Proposición 4.3.

(1) **WS5** $\vdash \neg\neg\Box p \longleftrightarrow \Box p, \neg\neg\Diamond p \longleftrightarrow \Diamond p$

(2) El conjunto de fórmulas fuertemente modalizadas de **WS5** *coincide con el conjunto de fórmulas fuertemente modalizadas de* **S5**

Demostración.

(1) Note que **WS5** $\vdash \neg\neg\Diamond p \longleftrightarrow \neg\neg\neg\Box\neg p \longleftrightarrow \neg\Box\neg p \longleftrightarrow \Diamond p$. Además la fórmula $\neg\neg\Box p \longleftrightarrow \Box p$ es equivalente a la fórmula $\neg\neg\Diamond p \longleftrightarrow \Diamond p$.

(2) Para toda álgebra monádica de Heyting (H, H_0), las fórmulas fuertemente modalizadas son válidas en (H, H_0) si y solamente sí son válidas en (H_0, H_0).
Por lo tanto si $(H, H_0) \models \Diamond p \longleftrightarrow \neg\Box\neg p$ se tiene que H_0 es un álgebra booleana monádica y por el teorema de completitud una fórmula fuertemente modalizada es válida en **WS5** si y solamente sí es válida en **S5**.

□

5. Dualidad Categórica

Los teoremas de representación han tenido gran importancia en todas las áreas de la matemática, ya sea por su aplicación directa e inmediata con la respectiva área, o por su transfondo "universal" que existe detrás de estos teoremas. En teoría de Categorías, se formaliza tal transfondo universal a través de definiciones y teoremas generales donde los teoremas concretos de representación vienen dados por casos particulares.

Existe una estrecha conexión entre retículos distributivos y espacios topológicos, dada por la representación espectral; sin embargo, en casos particulares la representación puede ser caracterizada por algunas propiedades, como es el caso del conocido teorema de representación de Stone para álgebras booleanas o el teorema de representación para álgebras de Heyting que será estudiado en los siguientes resultados.

Definición.
Sea L un retículo distributivo. Se define el conjunto $X = \{F \subseteq L : F \text{ es filtro primo}\}$. Considere la aplicación $\phi : L \to P(X)$ dada por $\phi(a) = \{F \in X : a \in F\}$.

Teniendo en cuenta está definición, se demostrará la siguiente proposición.

Proposición 5.1.
Sea L retículo con máximo y mínimo. La función ϕ es un monomorfismo de retículos; es decir, satisface las siguientes condiciones; para todo $a, b \in L$

(1) Si $a \neq b$ entonces $\phi(a) \neq \phi(b)$.

(2) $\phi(a \wedge b) = \phi(a) \cap \phi(b)$.

(3) $\phi(a \vee b) = \phi(a) \cup \phi(b)$.

(4) $\phi(a) = \emptyset$ si y solamente sí $a = 0$

(5) $\phi(a) = X$ si y solamente sí $a = 1$.

Demostración.

(1) Suponga que $a \neq b$, sin pérdida de generalidad suponga que $b \nleq a$, considere $I = (a]$ y $F = [b)$; entonces $I \cap F = \emptyset$. Por el teorema del filtro primo existe G filtro primo tal que $F \subseteq G$ y $G \cap I = \emptyset$. Por lo tanto se tiene que $b \in G$ y $a \notin G$, o equivalentemente $G \in \phi(b)$ y $G \notin \phi(a)$; así $\phi(a) \neq \phi(b)$.

(2) Sea F un filtro primo, se tiene entonces que

$$F \in \phi(a \wedge b) \Leftrightarrow a \wedge b \in F \Leftrightarrow a, b \in F \Leftrightarrow F \in \phi(a) \cap \phi(b).$$

(3) Nuevamente, usando que F es un filtro primo , entonces

$$F \in \phi(a \vee b) \Leftrightarrow a \vee b \in F \Leftrightarrow a \text{ ó } b \in F \Leftrightarrow F \in \phi(a) \cup \phi(b).$$

(4) Suponga que $a = 0$, si $a \in F$ para algún F filtro, entonces $b = b \vee 0 \in F$ para cualquier $b \in L$, es decir, $F = L$. Por lo tanto $\phi(0) = \emptyset$. Contrariamente, suponga que $a \neq 0$, basta mostrar que existe F filtro primo tal que $a \in F$. En efecto, sea $[a)$ el filtro generado por a y $I = \{0\}$, entonces $I \cap [a) = \emptyset$ y el resultado se sigue inmediatamente del teorema del filtro primo.

(5) *Note que $1 \in F$ para todo F filtro primo. Por otro lado, si $a \neq 1$ entonces existe F filtro primo tal que $a \notin F$.En efecto, considere I el ideal generado por a y $\{1\}$ filtro; usando el teorema del filtro primo se obtiene el resultado deseado.*

□

Lema 5.2.
Sean $A, B \subseteq L$. Si $\bigcap_{b\in B} \phi(b) \subseteq \bigcup_{a\in A} \phi(a)$ entonces existen A_0, B_0 subconjuntos finitos de A, B respectivamente tales que

$$\bigcap_{b\in B_0} \phi(b) \subseteq \bigcup_{a\in A_0} \phi(b)$$

Demostración.
Sea $F = [B)$ y $I = (A]$. Si $I \cap F = \emptyset$ existe G filtro primo tal que $F \subseteq G$ y $G \cap I = \emptyset$. Por lo tanto $G \cap A = \emptyset$, así $G \notin \phi(a)$ para todo $a \in A$; por otro lado, ya que $B \subseteq G$, entonces $G \in \phi(b)$ para todo $b \in B$, por hipótesis, $G \in \phi(a)$ para algún $a \in A$; lo cual es una contradicción con la afirmación anterior. Por lo tanto $I \cap F \neq \emptyset$; sea $x \in I \cap F$, entonces se tiene que

$$b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \leq x \leq a_1 \vee \cdots \vee a_m$$

para algunos $b_i \in B$ y $a_i \in A$. De esta manera usando que ϕ es morfismo,

$$b_1 \wedge \cdots \wedge b_n \leq a_1 \vee \cdots \vee a_m$$
$$\phi(b_1 \wedge \cdots \wedge b_n) \subseteq \phi(a_1 \vee \cdots \vee a_m)$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} \phi(b_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \phi(a_j)$$

□

Lema 5.3.
Sea H álgebra de Heyting y $a, b \in H$. Entonces $R^{-1}(\phi(a) \cap \phi(b)^c) = \phi(a \to b)^c$.

Demostración.
Ya que $a \wedge (a \to b) \leq b$ entonces $\phi(a) \cap \phi(a \to b) \subseteq \phi(b)$; se sigue entonces que $\phi(a) \cap \phi(b)^c \subseteq \phi(a \to b)^c$. Como $\phi(a \to b)^c$ es un cono descendente, $R^{-1}(\phi(a) \cap \phi(b)^c) \subseteq \phi(a \to b)^c$. Para la otra inclusión, sea F filtro primo con $a \to b \notin F$, es suficiente encontrar G filtro primo tal que $a \in G$, $b \notin G$ y $F \subseteq G$. Note que si $a, a \to b \in G$ entonces $b \in G$, así basta asegurarse que $a \to b \notin G$. Considere F' el filtro generado por $F \cup \{a\}$, si $a \to b \in F'$ entonces $a \wedge x \leq a \to b$ para algún $x \in F$, luego se sigue que $(a \wedge x) \wedge a \leq b$, esto es, $a \wedge x \leq b$, por lo tanto $x \leq a \to b$ lo cual implica que $a \to b \in F$ que es una contradicción. De esta manera, por el teorema del filtro primo, existe G filtro primo tal que $F' \subseteq G$ y $a \to b \notin G$. □

Teorema 5.4.
Sea H álgebra de Heyting. Sea X el conjunto de todos los filtros primos de H y Ω la topología generada por la subbase $\{\phi(a), \phi(a)^c : a \in H\}$. Entonces $(X, \Omega, \subseteq)$ es un espacio de Esakia.

Demostración.
Por definición, $\{\phi(a), \phi(a)^c : a \in H\}$ constituye una base de clopen. Para mostrar la compacidad de X, note primero que cualquier cubrimiento abierto de X es de la forma

$$X = \bigcup_{a\in A} \phi(a) \cup \bigcup_{b\in B} \phi(b)^c$$

donde $A, B \subseteq H$. De esta igualdad se tiene que

$$\bigcap_{b\in B} \phi(b) \subseteq \bigcup_{a\in A} \phi(a)$$

Aplicando el lema 4.2, existen A_0, B_0 subconjuntos finitos de A, B respectivamente tales que

$$\bigcap_{b\in B_0} \phi(b) \subseteq \bigcup_{a\in A_0} \phi(a)$$

o equivalentemente

$$X = \bigcup_{a\in A_0} \phi(a) \cup \bigcup_{b\in B_0} \phi(b)^c$$

el cual es un subcubrimiento finito del inicial y por lo tanto X es compacto.

Sean F_1, F_2 filtros primos de H distintos, entonces existe $a \in F_1$ y $a \notin F_2$; de esta manera se tiene que $F_1 \in \phi(a)$ y $F_2 \in \phi(a)^c$; ya que $\phi(a), \phi(a)^c$ son abiertos disjuntos entonces X es Hausdorff.

Se demostrará a continuación que $\subseteq$ es cerrada puntualmente; en efecto, sea $F \in X$; luego $R(F) = \{G \in X : F \subseteq G\}$. Sea $G \in R(G)^c$ por lo tanto $F \nsubseteq G$, tome $a \in F \setminus G$ así se tiene que $G \in \phi(a)^c$. Entonces es suficiente ver que $\phi(a)^c \cap R(F) = \emptyset$ para mostrar que $R(F)^c$ es abierto en X; suponga que existe $H \in \phi(a)^c \cap R(F)$ entonces $a \notin H$ y $F \subseteq H$ lo cual contradice que $a \in F$. Así $R(F)^c$ es abierto y por lo tanto $R(F)$ es cerrado.

Finalmente, sea $A \in CP(X)$, ya que A es abierto compacto y haciendo uso del lema 4.3 entonces

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \phi(a_i) \cap \phi(b_i)^c$$

implica que

$$\begin{aligned} R^{-1}(A) &= R^{-1}\big(\bigcup_{i=1}^{n} \phi(a_i) \cap \phi(b_i)^c\big) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} R^{-1}(\phi(a_1) \cap \phi(b_i)^c) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (\phi(a \to b))^c \end{aligned}$$

para algunos $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in H$. Por lo tanto $R^{-1}(A) \in CP(X)$.

□

De esta manera, a cualquier álgebra de Heyting puede asociarse un espacio de Esakia; recíprocamente, a todo espacio de Esakia puede asociársele un álgebra de Heyting, lo que será demostrado en el siguiente teorema.

Teorema 5.5.
Sea $(X, \Omega, \leq)$ un espacio de Esakia, entonces $(CON(X), \cap, \cup, \to, \emptyset)$ es un álgebra de Heyting donde $U \to V = (R^{-1}(U \cap V^c))^c$ para $U, V \in CON(X)$.

Demostración.
Sean $U, V \in CON(X)$, entonces $U \cap V^c$ es clopen, ya que X es un espacio de Esakia, $R^{-1}(U \cap V^c)$ es un cono descendente clopen y por lo tanto $(R^{-1}(U \cap V^c))^c \in CON(X)$, así la implicación está bien definida. Para ver que efectivamente es un álgebra de Heyting, basta mostrar que para todo $U, V, W \in CON(X)$

$$U \cap W \subseteq V \iff W \subseteq U \to V$$

Suponga que $U \cap W \subseteq V$, entonces $U \cap V^c \subseteq W^c$; ya que W^c es un cono descendente, entonces $R^{-1}(U \cap V^c) \subseteq W^c$, así se obtiene que $W \subseteq R^{-1}(U \cap V^c)^c = U \to V$. Contrariamente, suponga que $W \subseteq U \to V$; recuerde que $U \cap V^c \subseteq R^{-1}(U \cap V^c)$ lo que implica que $U \to V \subseteq (U \cap V^c)^c$. Así se obtiene que

$$U \cap W \subseteq U \cap (U \to V) \subseteq U \cap (U \cap V^c)^c \subseteq V$$

□

Puede demostrarse también que existen funtores contravariantes entre la categoría de álgebras de Heyting y la categoría de espacios de Esakia; además que estos funtores son naturalmente isomorfos; adicionando a este hecho los resultados obtenidos en los teoremas anteriores se tiene entonces el siguiente resultado.

Teorema 5.6.
La categoría dual de las álgebras de Heyting es naturalmente isomorfa a la categoría de espacios de Esakia.

Como caso particular de esta dualidad, es de interés el estudio de la dualidad entre álgebras monádicas de Heyting y espacios de Esakia con propiedades en especial. En los teoremas posteriores, se estudiará la dualidad entre la categoría de álgebras monádicas de Heyting y una subcategoría de los espacios de Esakia caracterizada por las propiedades enunciadas a continuación.

Teorema 5.7.
Sea $(H, \forall, \exists)$ álgebra monádica de Heyting, entonces el espacio dual es una cuadrupla (X, Ω, R, Q) donde (X, Ω, R) es un espacio de Esakia, Q es un preorden y una relación de Esakia, $R \subseteq Q$ y $Q = R \circ E_Q$ donde E_Q es la relación de equivalencia xE_Qy si y solamente sí xQy y yQx; además se satisface la siguiente condición

$$A \in CON_R(X) \Longrightarrow Q(A) \in CON_R(X)$$

Demostración.
Sea (X, Ω, R) el espacio dual de H y defina xQy si y solamente sí $\forall a \in x \Rightarrow a \in y$ para todo $a \in H$. Esta última condición es equivalente a $a \in x \Rightarrow \exists a \in y$ para todo $a \in H$ y también a $x \cap H_0 \subseteq y$; por lo tanto esto implica que $R \subseteq Q$ (recuerde que en este caso R es la contenencia usual). Veamos entonces que $Q = R \circ E_Q$; es fácil notar que $R \circ E_Q \subseteq Q$, para la otra contenencia, sean $x, y \in X$ tales que xQy; entonces $x \cap H_0 \subseteq y$. Sea $F = [x \cup (y \cap H_0))$, por lo tanto $F \cap H_0 \subseteq y \cap H_0$; usando el lema de Zorn, puede probarse que existe $z \in X$ tal que $F \subseteq z$ y $z \cap H_0 = y \cap H_0$, por lo tanto este z cumple que xRz y zE_Qy.

Ahora veamos que $\phi(\forall a) = (Q^{-1}(\phi(a)^c))^c$, en efecto, si $\forall a \in x$ entonces $a \in x$, ya que xQx se sigue que $x \in Q(\phi(a))$. Sea $x \in \phi(\forall a)^c$, así $\forall a \notin x$ y ya que $[x \cap H_0)$ es un filtro monádico, se tiene que $a \notin [x \cap H_0)$. Por lo tanto existe $y \in X$ tal que $x \cap H_0 \subseteq y$ y $a \notin y$ (teorema del filtro primo); lo cual significa que $x \notin (Q^{-1}(phi(a)^c))^c$. Así se tiene que $Q(\phi(a)) \subseteq \phi(\forall a)$. De manera análoga se *prueba que $\phi(\exists a) = Q(\phi(a))$.*

Para completar la prueba falta mostrar que Q es una relación de Esakia y que $A \in CON_R(X)$ implica que $Q(A) \in CP(X)$. Dado $A \in CP(X)$, entonces $A = \bigcup_{i=1}^{n} \phi(a_i) \setminus \phi(b_i)$ lo cual implica que $Q^{-1}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} Q^{-1}(\phi(a_i) \setminus \phi(b_i)) = \bigcup_{i=1}^{n} Q^{-1}(\phi(a \to b))^c$ y por lo tanto $Q^{-1}(A) \in CP(X)$. Ya que $Q(x) = \bigcap\{A \in CON_Q(X) : Q(x) \subseteq A\}$ se tiene entonces que $Q(x)$ es cerrado para todo $x \in X$. Finalmente ya que $\phi(\exists a) = Q(A)$, $A \in CON_R(X)$ implica que $Q(A) \in CP(X)$. □

Teorema 5.8.
Sea (X, Ω, R, Q) una cuadrupla que satisface las condiciones del teorema anterior. El álgebra monádica de Heyting dual $(H, \forall, \exists)$ a este espacio está dada de la siguiente manera:
H es el álgebra de Heyting dual al espacio de Esakia (X, Ω, R) y para todo $A \in H = CON_R(X)$ se define $\forall(A) = (Q^{-1}(A^c))^c$ y $\exists(A) = Q(A)$.

6. Teorema de Glivenko para lógicas Superintuicionistas

Usualmente la prueba del teorema de Glivenko para la lógica intuicionista utiliza la semántica de los modelos de Kripke. En esta sección se presentarán pruebas alternativas utilizando las estructuras algebraicas y topológicas introducidas hasta el momento. Una de las formulaciones del teorema de Glivenko es la siguiente

$$\underline{Clas} \vdash A \Longleftrightarrow L \vdash \neg\neg A$$

para cualquier lógica superintuicionista L y para cualquier fórmula A.

Note que una implicación del teorema de Glivenko es inmediata, en efecto, si $L \vdash \neg\neg A$ entonces $\underline{Clas} \vdash \neg\neg A$ ya que $L \subseteq \underline{Clas}$. Como $\underline{Clas} \vdash \neg\neg A \longleftrightarrow A$ se tiene entonces que $\underline{Clas} \vdash A$.

El problema surge cuando se desea mostrar que si $L \nvdash \neg\neg A$ entonces también $\underline{Clas} \nvdash A$. Por el teorema de Completitud, se tiene que si $L \nvdash \neg\neg A$ entonces existe un álgebra de Heyting $H \in Var(L)$ tal que $H \not\models \neg\neg A$. La demostración del teorema de Glivenko estaría completa si a H se asocia un álgebra booleana B_H tal que $B_H \not\models A$, ya que usando nuevamente el teorema de completitud se tendría el resultado.

Con este esquema de demostración presentado anteriormente, se prosigue a enunciar el teorema de Glivenko y dar la demostración formal de la implicación que presenta dificultades.

Teorema 6.1.
Sea L lógica superintuicionista y A fórmula intuicionista, si $L \nvdash \neg\neg A$ entonces $\underline{Clas} \nvdash A$.

Demostración.
Suponga que $L \nvdash \neg\neg A$, si A es una fórmula donde $p_1, \ldots, p_n$ son las letras proposicionales que ocurren en A, entonces existe $H \in Var(L)$, $a_1, \ldots, a_n \in H$ y un polinomio $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ correspondiente a $A(p_1, \ldots, p_n)$ tal que $H \not\models \neg\neg\alpha(a_1, \ldots, a_n)$, es decir, $\neg\neg\alpha(a_1, \ldots, a_n) \neq 1$ en H. Por lo tanto $\neg\neg\alpha(a_1, \ldots, a_n) \neq 1$ en $R(H)$; ya que $\neg\neg$ es un homomorfismo, $\neg\neg\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \alpha(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n)$. Ya que $\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n \in R(H)$ y $\alpha(\neg\neg a_1, \ldots, \neg\neg a_n) \neq 1$ se tiene entonces que $A(p_1, \ldots, p_n)$ no es válido en $R(H)$ y por lo tanto $\underline{Clas} \nvdash A$. □

Ahora se dará una prueba alternativa del teorema de Glivenko usando la dualidad entre álgebras de Heyting y espacios de Esakia; recuerde además que por el teorema de representación de Stone, existe una dualidad entre álgebras booleanas y espacios de Stone. Para llevar a cabo esta prueba, la demostración hecha anteriormente debe ser traducida a un lenguaje topológico, por lo tanto los siguientes resultados son necesarios para dar una caracterización topológica al conjunto de elementos regulares de un álgebra de Heyting.

Lema 6.2.
Sea H álgebra de Heyting y $(X, \Omega, \subseteq)$ su espacio dual, denote por $\max X$ el conjunto de los filtros maximales de X. Entonces se tiene que

(1) $\max X \neq \emptyset$ *y para cada* $a \in H, a \neq 0$ *existe* $F \in \max X$ *tal que* $a \in F$.

(2) Para todo $G \in X$ existe $F \in \max X$ tal que $G \subseteq F$.

(3) $a \in H$ es denso si y solamente sí $\max X \subseteq \phi(a)$.

(4) $\max X$ *es un cono cerrado de X.*

Demostración.
La prueba de (1) y (2) es una consecuencia del lema de Zorn. Para probar (3), sea $a \in H$ elemento denso y $F \in \max X$. Ya que $F \subseteq [F \cup \{a\})$ basta mostrar que este filtro es propio y así $F \in \phi(a)$. Suponga que $H = [F \cup \{a\})$, así $0 = f \wedge a$ para algún $f \in F$, así se obtiene que $0 = \neg\neg 0 = \neg\neg f \wedge \neg\neg a = \neg\neg f \wedge 1 = \neg\neg f \in F$ $(f \leq \neg\neg f)$ lo cual es una contradicción. Contrariamente, si a no es un elemento denso, entonces $\neg\neg a \neq 1$ y por lo tanto $\neg a = \neg\neg\neg a \neq 0$, por (1), existe $G \in \max X$ tal que $\neg a \in G$, y así se tiene que $a \notin G$, con lo cual $\max X \nsubseteq \phi(a)$. Finalmente, para probar que $\max X$ es cerrado, sea $F \notin \max X$ y $a \notin F$ un elemento denso de H, por la afirmación (3), $\max X \subseteq \phi(a)$, o equivalentemente, $\phi(a)^c \subseteq (maxX)^c$, así $(\max X)^c$ es abierto y por lo tanto $\max X$ es cerrado. $\square$

Corolario 6.3.
$\max X = \bigcap_{a \in F_D} \phi(a)$, *y por lo tanto* $\max X$ *corresponde a el filtro de todos los elementos densos de H y así el espacio dual de $R(H)$ es isomorfo a* $\max X$ *(con la topología inducida respectiva).*

En este caso el espacio dual de $R(H)$ es un espacio de Stone, ya que la relación de contenencia restringida a $\max X$ resulta la identidad, por lo tanto puede darse una *segunda demostración* para el teorema de Glivenko: Dada una fórmula intuicionista A, entonces $\neg\neg A$ es válida en H ssi $\neg\neg A$ es válida en X ssi A es válida en $\max X$ ssi A es válida en $R(H)$. En esta sencilla demostración está escondida toda la teoría construida hasta ahora, el teorema de completitud para lógicas superintucionistas, la dualidad categórica entre retículos y espacios topológicos y finalmente el hecho de que los filtros maximales de un álgebra de Heyting son lugares discretos donde, como ha de esperarse, la información se comporta de manera clásica.

7. Teorema de Glivenko para lógicas sobre Mipc

Ahora se desea extender el teorema de Glivenko para la lógica intuicionista modal, y la primera idea que surge para lograr este cometido es tratar de imitar la prueba hecha para el teorema de Glivenko en el caso de lógicas superintuicionistas. Una formulación natural para la extensión del teorema de Glivenko a la lógica modal sería la siguiente:

Para cualquier lógica intermedia L sobre **Mipc** y cualquier fórmula A

$$\mathbf{S5} \vdash A \Longleftrightarrow L \vdash \neg\neg A$$

Como en el caso para lógicas superintuicionistas, una implicación es inmediata: si $L \vdash \neg\neg A$ entonces $S5 \vdash A$. Para probar la recíproca, sería suficiente probar que si $L \nvdash \neg\neg A$ entonces $S5 \nvdash A$. En efecto, si $L \nvdash \neg\neg A$ entonces existe un álgebra monádica de Heyting $(H, \forall, \exists) \in Var(L)$ tal que $(H, \forall, \exists) \not\models \neg\neg A$; imitando la demostración del teorema de Glivenko, se desea asociar un álgebra monádica booleana $(B_H, \forall_H, \exists_H)$ de tal manera que ésta invalide la fórmula A.

En el caso anterior se siguió este proceso para obtener un álgebra booleana asociada a un álgebra de Heyting valiéndose la dualidad categórica:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "(1)"] & (X, \Omega, \subseteq) \arrow[d, "(2)"] \\
B_H \arrow[u, "(4)"] & (\max X, \Omega') \arrow[l, "(3)"]
\end{tikzcd}$$

donde el subespacio $(\max X, \Omega')$ del espacio de Esakia dual a H resultaba un espacio de Stone.

Al tratar de extender este proceso al caso modal, la manera más natural de obtener $(B_H, \forall_H, \exists_H)$ sería extraer el conjunto de todos los clopen de $\max X$ y mostrar que éstos son una imagen homomórfica de $(H, \forall, \exists)$, el cual ya forma un álgebra monádica Booleana. Sin embargo, en general $\max X$ no forma un $Q-$cono de X y por lo tanto el conjunto de todos los clopen de $\max X$ no puede ser una imagen homomórfica de $(H, \forall, \exists)$ (ya que no sería cerrado con respecto a los operadores $\forall, \exists$).

Sin embargo, esta dificultad puede superarse considerando el conjunto

$$E_Q(\max X) = \bigcup_{x \in \max X} E_Q(x) = \bigcup_{x \in \max X} \{y \in X : x E_Q y\}$$

el cual es el mínimo $Q-$cono que contiene a $\max X$ y tratar con el álgebra booleana de todos los $R-$conos clopen de $E_Q(\max X)$, el cual ya sería cerrado con respecto a los "cuantificadores" y por lo tanto una imagen homomórfica de $(H, \forall, \exists)$. Para esto también es necesario conocer la lógica detrás de tales estructuras, y por lo tanto reformular el teorema de Glivenko para la lógica intuicionista modal por una versión debilitada.

Para construir el álgebra booleana asociada a un álgebra de Heyting, se hizo uso del filtro de los elementos densos a través del álgebra cociente. Ahora, se estudiarán las propiedades del álgebra cociente asociada al filtro de los elementos super densos de un álgebra monádica de Heyting.

Lema 7.1.
Sea $(H, \forall, \exists)$ álgebra monádica de Heyting. La fórmula $\forall\neg\neg a \leq \neg\neg\forall a$ vale en $(H, \forall, \exists)$ si y solamente sí $E_Q(\max X) = \max X$.

Demostración.
Suponga que $E_Q(\text{máx}\, X) = \text{máx}\, X$ y sea $x \in \phi(\neg\neg\forall a)$, luego existe $y \in \text{máx}\, X$ tal que $xRy(x \subseteq y)$ y $y \in \phi(\neg\forall a)$; así se obtiene que $y \notin \phi(\forall a)$ y además existe $z \in X$ tal que yE_Qz y $z \notin \phi(a)$. Ya que $E_Q(\text{máx}\, X) = \text{máx}\, X$ entonces $z \in \text{máx}\, X$, y por lo tanto $z \notin \phi(\neg\neg a)$ y ya que xQz se tiene que $x \notin \forall\neg\neg a$. Entonces $\forall\neg\neg a \leq \neg\neg\forall a$.
Contrariamente, suponga que existe $x \in \text{máx}\, X$ y $y \in X \setminus \text{máx}\, X$ tal que yRx y yE_Qx. Ya que $y \notin \text{máx}\, X$ y $\text{máx}\, X$ es un $R-$cono cerrado, existe $a \in H$ tal que $\text{máx}\, X \subseteq \phi(a)$ y $y \notin \phi(a)$. Entonces $\forall\neg\neg a = 1$ y $x \notin \phi(\neg\neg\forall a)$. Por lo tanto se tiene que $\forall\neg\neg a \leq \neg\neg\forall a$ no es válido en $(H, \forall, \exists)$. □

Proposición 7.2.
Sea $(H, \forall, \exists)$ álgebra monádica de Heyting. Entonces $F_{SD} = F_D$ si y solamente sí $\forall\neg\neg a \leq \neg\neg\forall a$.

Demostración.
Suponga que $\forall\neg\neg a \leq \neg\neg\forall a$ para todo $a \in H$ y sea $a \in F_D$, por lo tanto $\neg\neg a = 1 \Rightarrow \forall\neg\neg a = 1 \Rightarrow \neg\neg\forall a = 1$ y así $a \in F_{SD}$.

Por otro lado, suponga que $\forall\neg\neg a \leq \neg\neg\forall a$ no vale en $(H, \forall, \exists)$; por el lema anterior, $\text{máx}\, X \subsetneq E_Q(\text{máx}\, X)$, por lo tanto existe $x \in X$ y $y \in X \setminus \text{máx}\, X$ tal que yE_Qx. Ya que $\text{máx}\, X$ es un R-cono cerrado y $y \notin \text{máx}\, X$ entonces existe $B \in \text{CON}_R(X)$ tal que $\text{máx}\, X \subseteq B$ y $y \notin B$. Observe que $\neg B = (R^{-1}(B))^c = \emptyset$ ya que $\text{máx}\, X \subseteq B$ implica que $R^{-1}(B) = X$ y por lo tanto $\neg\neg B = X$, es decir, B es denso en $\text{CON}_R(X)$. Por otro lado si $x \in \forall(B) = (Q^{-1}(B^c))^c$, entonces $x \notin Q^{-1}(B^c)$, es decir, para todo $y \notin B$ $x \not{E}_Q y$, lo cual es una contradicción con la existencia del y inicial. De esta manera, $x \notin \forall(B)$ y $x \in \text{máx}\, X$ implican que $x \notin \neg\neg\forall(B)$; es decir, $\neg\neg\forall(B) \neq X$ y así se concluye que B no es super denso en $\text{CON}_R(X)$. Ya que $\text{CON}_R(X) \simeq H$, se tiene que $F_{SD} \subsetneq F_D$. □

En el caso de álgebras de Heyting se demostró que el álgebra booleana de los elementos regulares es isomorfa al cociente del álgebra de Heyting por el respectivo filtro de elementos densos. A continuación se presentará una caracterización del cociente entre un álgebra monádica de Heyting y el filtro de los elementos super densos.

Proposición 7.3.
Sea $(H, \forall, \exists)$ álgebra monádica de Heyting y F_{SD} el filtro monádico de los elementos super densos de H. Entonces se satisface que

(1) $a \in H$ es super denso si y solamente sí $E_Q(\text{máx}\, X) \subseteq \phi(a)$.

(2) $E_Q(\text{máx}\, X) = \bigcap_{a \in F_{SD}} \phi(a)$.

Demostración.
Usando la dualidad categórica y el lema 5.2(3) se tiene que $a \in H$ es super denso ssi $\neg\neg\forall\phi(a) = X$ ssi $\text{máx}\, X \subseteq \forall\phi(a)$ ssi $E_Q(\text{máx}\, X) \subseteq \phi(a)$. □

Corolario 7.4.
El espacio dual de $(H/F_{SD}, \forall', \exists')$, con la restricción respectiva de los operadores $\forall, \exists$, es isomorfo a el espacio $(E_Q(\text{máx}\, X), \Omega', R'.Q')$ con la topología y relaciones inducidas.

En el conjunto $E_Q(\text{máx}\, X)$, Q coincide con E_Q y por lo tanto Q es una relación de equivalencia en $E_Q(\text{máx}\, X)$. Más aún, el conjunto de todos los Q-conos clopen de $E_Q(\text{máx}\, X)$ constituye un álgebra booleana que resulta isomorfa a $H_0/_{F_{SD} \cap H_0}$. Además $F_{SD} \cap H_0$ coincide con el conjunto de todos los elementos densos de H_0 y de la proposición 1.4 se sigue que $H_0/_{F_{SD}\cap H_0} \simeq R(H_0)$. Ya que $R(H_0) \simeq (H/F_{SD})_0$ se sigue inmediatamente que $H/F_{SD} \models$ **Mipc** $\oplus \exists a = \neg\forall\neg a$.

Con los resultados presentados anteriormente, se establecen preliminares para enunciar una versión debilitada para lógicas sobre **Mipc** del teorema de Glivenko; ya que con un razonamiento análogo para la versión intuicionista, se construyó un álgebra monádica de Heyting que satisface **WS5** a partir de un álgebra monádica de Heyting. De esta manera se está en la condición de demostrar el siguiente resultado

Teorema 7.5 (Teorema de Glivenko para lógicas sobre **Mipc**).
Para cualquier lógica intermedia L entre **Mipc** *y* **WS5** *y cualquier fórmula A*

$$\mathbf{WS5} \vdash A \Longleftrightarrow L \vdash \neg\neg\Box A$$

Además, si A es una fórmula completamente modalizada

$$\mathbf{WS5} \vdash A \Longleftrightarrow L \vdash \neg\neg A$$

Demostración.
Suponga que $L \vdash \neg\neg\Box A$, ya que $L \subseteq \mathbf{WS5}$, $\mathbf{WS5} \vdash \neg\neg\Box A \longleftrightarrow \Box A$ y $\mathbf{WS5} \vdash \Box A \to A$; entonces se sigue que $\mathbf{WS5} \vdash A$.

Ahora suponga que $L \nvdash \neg\neg\Box A$, por lo tanto existe un álgebra monádica de Heyting $(H, \forall, \exists) \in Var(L)$ tal que $(H, \forall, \exists) \not\models \neg\neg\Box A$. Considere el álgebra $(H/F_{SD}, \forall', \exists')$, por la observación inmediatamente anterior al teorema, $(H/F_{SD}, \forall', \exists') \models \mathbf{WS5}$, además ya que esta álgebra es una imagen homomórfica de $(H, \forall, \exists)$, $(H/F_{SD}, \forall', \exists') \not\models \neg\neg\Box A$. Por el corolario 6.4, el espacio dual de $(H/F_{SD}, \forall', \exists')$ es isomorfo a $E_Q(\text{máx}\, X)$ el cual contiene a $\text{máx}\, X$, y por lo tanto para cualquier fórmula B, B es válida en H ssi B es válida en X ssi B es válida en $\text{máx}\, X$ ssi B es válida en $E_Q(\text{máx}\, X)$ ssi B es válida en H/F_{SD}.

Por esta última observación se tiene que $H/F_{SD} \not\models \neg\neg\Box A$ de donde se sigue que $(H/F_{SD})_0 \not\models \neg\neg\Box A$; ya que $(H/F_{SD})_0 \simeq R(H_0)$ el cual es un álgebra booleana, se tiene que $(H/F_{SD})_0 \not\models \Box A$ lo cual implica que $(H/F_{SD})_0 \not\models A$; de esta manera se concluye que $H/F_{SD} \not\models A$ (prueba proposición 3.3 (2)).

En el caso en que A sea una fórmula completamente modalizada, de la proposición 3.2 se tiene que $L \vdash \Box A \longleftrightarrow \Box A$. $\Box$

De la proposición 3.3 se sigue que si A es una fórmula fuertemente modalizada, entonces

$$\mathbf{S5} \vdash A \Longleftrightarrow L\neg\neg A$$

Más aún, ya que $(H/F_{SD}, \forall', \exists') \models \mathbf{WS5} \oplus L$ se tiene el siguiente resultado

Corolario 7.6.
Para cualquier lógica intermedia L sobre **Mipc** *y cualquier fórmula A*

$$\mathbf{WS5} \oplus L \vdash A \Longleftrightarrow L \vdash \neg\neg\Box A$$

si A es una fórmula completamente modalizada

$$\mathbf{WS5} \oplus L \vdash A \Longleftrightarrow L \vdash \neg\neg A$$

Además, si A es fuertemente modalizada

$$\mathbf{S5} \vdash A \Longleftrightarrow L \vdash \neg\neg A$$

La demostración de la versión del teorema de Glivenko para la lógica intuicionista modal requirió del uso de todas las propiedades estructurales que se encuentran detrás de la lógica; la constante dialéctica entre la sintaxis y la semántica, o mejor aún, la armonía que existe entre propiedades sintácticas, algebraicas o topológicas fue la poderosa herramienta que permitió llegar a la conclusión de tal resultado.

Referencias Bibliográficas

[1] Bezhanishvili. Guram, *Glivenko Type Theorems for Intuitionistic Modal Logics*, Studia Logica 67 (2001), 89-109.

[2] Bezhanishvili. Guram, *Varieties of Monadic Heyting Algebras. Part I*, Studia Logica 61 (1998), 367-402.

[3] Bezhanishvili. Guram, *Varieties of Monadic Heyting Algebras. Part II: Duality Theory*, Studia Logica 62 (1999), 1-28.

[4] Bezhanishvili. Guram, *Varieties of Monadic Heyting Algebras. Part III*, Studia Logica 64 (2000), 215-256.

[5] Chagrov, A and Zakharyashev, M. *Modal Logic*, Oxford University Press, 1997.

[6] Halmos, P.R. *Algebraic Logic*, Chelsea Publishing Company, New York, 1962.